Nº d'enregistrement

au C.N.R.S. :

A.O. 1775

Article Principal

recouvrant en partie

LA THESE DE DOCTORAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

Huyen DANGVU

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

Sujet de la Thèse :

Contribution à une formulation minkowskienne de la gravitation einsteinienne par une méthode du type Rosen.

Soutenue le 15 Juin 1966, devant la Commission d'examen :

M. A. Lichnerowicz Président

Mme M. A. Tonnelat

M. A. Papapetrou Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546003_0027

Extrait du *Cahier de Physique* n° 198
Février 1967, pages 53-99

CONTRIBUTION À UNE FORMULATION MINKOWSKIENNE DE LA GRAVITATION EINSTEINIENNE PAR UNE MÉTHODE DU TYPE ROSEN

PAR

Huyen DÄNGVU
Institut Henri Poincaré, Paris

INTRODUCTION

En relativité générale, l'espace-temps est représenté par une variété pseudo-riemannienne munie d'une métrique de type hyperbolique normal et les lois de la gravitation se traduisent par l'existence de conditions de structure de l'espace-temps. Cependant, certains auteurs, comme Painlevé, Rosen, Papapetrou, Gupta, Feynman, ..., ont montré qu'on peut considérer la théorie de la gravitation d'Einstein comme une théorie de la gravitation dans un espace-temps minkowskien absolu. Painlevé a proposé d'appeler la théorie ainsi modifiée *théorie semi-einsteinienne de la gravitation.* Dans ce travail nous nous proposons de formuler cette théorie dans l'espace-temps de la relativité restreinte, indépendamment du formalisme de la relativité générale.

Nous montrerons d'abord que, dans le cadre de la relativité restreinte, le principe d'équivalence admet le corollaire suivant.

Les trajectoires d'une particule d'épreuve ponctuelle dans un champ gravitationnel sont des géodésiques d'une variété de configuration V_4, *munie d'une métrique de type hyperbolique normal.*

On sait [4] que, dans la gravitation newtonienne, les trajectoires d'une particule d'épreuve ponctuelle dans un champ gravitationnel peuvent être aussi considérées comme des géodésiques d'une variété de configuration (dite variété newtonienne [3*a*]), munie de la métrique suivante :

$$\text{(0-1)} \qquad ds^2 = \frac{dt^2}{U} - (dx^2 + dy^2 + dz^2)\,,$$

où $U = U(x, y, z)$ est le potentiel newtonien. Lorsque $U = 0$, ce ds^2 se réduira au ds^2 de l'espace-temps classique ($c = \infty$). Dans ce travail, la variété V_4 précédente apparaîtra comme l'analogue moderne de la variété newtonienne.

La loi du mouvement étant connue, on pourrait alors en déduire les équations du champ par la méthode d'invariance sans avoir besoin d'introduire d'autres hypothèses.

En effet, considérons un système formé d'un champ relativiste quelconque et de sa particule d'épreuve et cherchons à connaître, outre l'invariance de Lorentz,

UNIV. LEIDEN

pour quelle transformation spéciale T les équations du mouvement et les équations du champ sont invariantes. Supposons que ces équations sont obtenues respectivement par les principes d'extremum $\delta I_p = 0$, $\delta I_{ch} = 0$, où les variations δ satisfont aux hypothèses habituelles. Dans ce cas les δI_p et δI_{ch} devraient être aussi invariants par rapport à T. Par conséquent, pour connaître la transformation spéciale T, il suffit de connaître l'expression explicite de I_p par exemple. Ayant trouvé T, on écrit que δI_{ch} est invariant par rapport à T. On obtient ainsi des identités que le champ doit satisfaire.

Par exemple, dans le cas électromagnétique on a

$$I_p = -mc\int_C ds + \frac{e}{c}\int_C A_\mu\, dx^\mu . \tag{0-2}$$

Les équations du mouvement sont celles réalisant l'extremum de I_p pour des variations à extrémités fixes.

Considérons la transformation

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda , \tag{0-3}$$

où $\Lambda(x^\alpha)$ est une fonction quelconque. L'intégrale I_p se transforme en

$$I_p + \frac{e}{c}\int_C \partial_\mu \Lambda\, dx^\mu . \tag{0-4}$$

Mais $\partial_\mu \Lambda\, dx^\mu = d\Lambda$; par conséquent, la dernière intégrale définie s'intègre immédiatement et est devenue une constante (extrémités fixes). Sa variation sera nulle. On peut donc l'enlever de (0-4). L'intégrale I_p nous fournit ainsi la transformation de jauge (0-3). En écrivant que δI_p et δI_{ch} sont invariants par rapport à (0-3) nous obtiendrons respectivement l'équation de continuité et l'identité de jauge. Si I_{ch} est de la forme

$$I_{ch} = \frac{1}{c}\int_D \mathcal{L}\, d^4x \qquad (d^4x = dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^0) ,$$

cette identité de jauge s'écrira alors

$$\partial_\mu \mathcal{L}^\mu \equiv 0 \qquad (\mathcal{L}^\mu = \delta\mathcal{L}/\delta A_\mu) .$$

C'est une méthode analogue que nous allons appliquer au cas gravitationnel.

Si les trajectoires d'une particule d'épreuve dans un champ gravitationnel sont des géodésiques d'une variété pseudo-riemannienne V_4, nous connaissons la forme exacte de I_p. Nous montrerons que l'intégrale I_p est invariante par rapport à une certaine transformation spéciale du potentiel gravitationnel. En écrivant que δI_p et δI_{ch} sont invariants par rapport à cette transformation, nous obtiendrons respectivement l'équation de continuité et un système d'identités du champ. Nous montrerons alors que les variétés pseudo-riemanniennes qui satisfont à ce système d'identités sont des variétés d'Einstein.

Pour établir la relation entre le potentiel gravitationnel et les tenseurs métriques de la variété d'Einstein et de l'espace-temps minkowskien nous utiliserons le formalisme de N. Rosen. Les identités et lois de conservation résultent des méthodes variationnelles de D. Hilbert, E. Noether, M.-A. Tonnelat et A. Trautman. En particulier, la terminologie sur les tenseurs impulsion-énergie est celle de F. J. Belinfante, M.-A. Tonnelat et A. Trautman.

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à M^me le Professeur M.-A. Tonnelat qui m'a accueilli au Service de Théories physiques de l'Institut Henri

Poincaré et qui m'a encouragé avec tant de bienveillance dans la poursuite de ce travail. J'adresse mes vifs remerciements à Mr le Professeur A. Lichnerowicz pour les conseils qu'il m'a prodigués et les marques de sympathie qu'il a bien voulu me témoigner. Je remercie également Mr le Professeur A. Papapetrou pour l'accueil bienveillant qu'il m'a toujours réservé et les suggestions qu'il m'a données.

I. Théorie semi-einsteinienne de la gravitation

1. **Principe de la théorie.** — *1. Définition du système d'inertie.* — La théorie de la relativité restreinte est fondée sur la conception d'un espace-temps minkowskien absolu (*continuum spatii et temporis est absolutum*, écrivait Einstein) et indépendant des phénomènes physiques.

La théorie de la relativité générale rejette cette conception et suppose que les propriétés du continuum spatio-temporel doivent être considérées comme des propriétés de champ de l'espace, analogue au champ électromagnétique [7*c*].

Une des critiques que l'on avait, en effet, formulée à l'égard de la relativité restreinte repose sur la définition d'un système d'inertie. Si l'on définit le système d'inertie à partir de la loi d'inertie, on commettrait en ceci la faute que les logiciens nomment un *cercle* : un système S est un système d'inertie si une masse libre est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à S. Mais une masse n'est libre que si elle est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un système d'inertie (1).

Il en résulte que la loi d'inertie ne peut définir à la fois le système d'inertie et la masse libre.

En admettant l'existence d'un espace absolu, la théorie newtonienne esquivait au moins la difficulté précédente ; *tout système de référence lié à l'espace absolu constituait un système d'inertie.*

Pour la relativité restreinte, il n'en est plus de même. Néanmoins la relativité restreinte introduit une autre grandeur absolue : la vitesse de la lumière. Il est donc logique de lier la définition du système d'inertie à la vitesse de la lumière. On peut adopter la définition suivante.

Tout système de référence (*cartésien*) *est inertique si, dans ce système, la lumière se propage de façon isotrope et la vitesse de la lumière est égale à une constante absolue* **c**. *Tout système de référence* (*cartésien*), *animé d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un système d'inertie, est aussi un système d'inertie.*

Le principe de la relativité restreinte est alors : *tous les systèmes d'inertie sont équivalents pour la description des lois de la nature* (principe de relativité).

Ainsi l'énoncé d'un principe de relativité est le même en mécanique moderne et en mécanique classique, mais la définition du système d'inertie a changé.

(1) Cette dernière assertion est équivalente à celle-ci : une masse est libre si aucune force ne s'exerce sur elle (ou si elle est loin des autres masses). Comme l'a fait remarquer Einstein, on reconnaît qu'aucune force ne s'exerce sur une masse (ou qu'elle est loin des autres masses), seulement quand elle est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un système d'inertie.

Le système d'inertie étant défini, nous pouvons alors savoir si une masse est accélérée ou non en comparant son mouvement à celui d'une masse libre (c'est-à-dire une masse animée d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un système d'inertie).

Le système de référence lié à une masse accélérée sera dit système accéléré. Nous obtenons immédiatement du principe de relativité le théorème suivant.

THÉORÈME I. — *Il est possible de déceler le mouvement accéléré d'un système de référence au moyen d'une expérience effectuée dans ce système de référence.*

Cette possibilité est aussi expérimentalement constatée par l'expérience du pendule de Foucault et les expériences de Harress, Sagnac et Pogany.

2. Le principe d'équivalence et ses conséquences. — En relativité restreinte nous distinguerons deux notions de masse totalement différentes :

a) la *masse inerte* est celle qui figure dans l'expression de la force de Minkowski (ou force d'inertie) (2)

$$F^\mu = m\, c^2\, \mathrm{d}u^\mu/\mathrm{d}s \qquad (u^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s)\,,$$

où $\mathrm{d}s$ est la métrique de l'espace-temps ;

b) la *masse grave* est la source du champ gravitationnel.

Par analogie avec l'électrodynamique, nous supposons que lorsque deux masses graves sont placées près l'une de l'autre, elles s'attirent mutuellement. La force d'attraction mutuelle sera appelée force gravitationnelle.

La relativité générale admet les deux principes fondamentaux suivants : le principe de relativité généralisée (3) et le principe d'équivalence. Dans ce travail nous avons pour but de construire, dans le cadre de la relativité restreinte, une théorie phénoménologique de la gravitation ; par conséquent, nous supprimerons le principe de relativité généralisée qui est incompatible avec la théorie de la relativité restreinte et nous admettrons seulement le principe d'équivalence dont voici l'énoncé : *un champ de forces d'inertie est localement équivalent à un champ de forces gravitationnelles.*

Nous nous proposons maintenant de tirer des conséquences de ce principe d'équivalence, dans le cadre de la relativité restreinte.

Considérons un système d'inertie S. Un observateur lié à S, en mesurant les distances et le temps avec les étalons de S, trouve, évidemment, que l'espace-temps est une variété minkowskienne M_4, douée de la métrique suivante :

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu \qquad (\eta_{\mu\nu} = -1, -1, -1, +1)\,.$$

Supposons que S soit accéléré. Alors l'observateur de S peut déceler ce mouvement accéléré par des expériences effectuées sur S. Par conséquent, il sait que les coordonnées x^μ données par ses étalons sont maintenant des coordonnées curvilignes de M_4 dont la métrique est maintenant $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha)\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu$, où les $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ sont de la forme

$$g_{\mu\nu} = h_\mu^{(\rho)}\, h_\nu^{(\sigma)}\, \eta_{\rho\sigma}\,, \tag{I-1}$$

(2) La force d'inertie obéit à la relation d'orthogonalité $F^\mu\, u_\mu = 0$, en tenant compte de $u^\mu\, u_\mu = 1$.

(3) appelé aussi principe de covariance générale ; nous n'emploierons pas ce qualificatif qui prête à discussion.

avec

$$h_\mu^{(\rho)} = \partial_\mu \varphi^\rho \,. \tag{I-2}$$

$\varphi^\rho(x^\alpha)$ sont quatre fonctions qui dépendent du mouvement accéléré ([4]).

Les équations (I-2) montrent que les $h_\mu^{(\rho)}(x^\alpha)$ satisfont aux conditions suivantes :

$$\partial_\nu h_\mu^{(\rho)} = \partial_\mu h_\nu^{(\rho)} \,. \tag{I-3}$$

Ce résultat qui découle de considérations de relativité restreinte est cependant suffisant pour qu'en appliquant le principe d'équivalence nous obtenions l'effet du champ de gravitation sur les lois de la physique.

Considérons, par exemple, les équations de Maxwell dans le vide.

Lorsque le système de référence S est un système d'inertie, les équations de Maxwell s'écrivent, dans ce système,

$$\text{a) } \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \,, \qquad \text{b) } \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \,, \tag{I-4}$$

$$\text{c) } F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\, \eta^{\nu\sigma}\, F_{\rho\sigma} \qquad (F_{\rho\sigma} = \partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \,.$$

Quand S est accéléré, les x^μ sont devenus des coordonnées curvilignes de l'espace-temps. Par conséquent, ces équations s'écrivent

$$\text{a) } \nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0 \,, \qquad \nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \,, \tag{I-5}$$

$$\text{c) } F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}\, g^{\nu\sigma}\, F_{\rho\sigma} \qquad (F_{\rho\sigma} = \nabla_\rho A_\sigma - \nabla_\sigma A_\rho) \,,$$

où ∇_ν est l'opérateur de dérivation covariante relatif aux $g_{\mu\nu}$.

En vertu du principe d'équivalence, on peut aussi considérer S comme un système d'inertie et, par suite, les x^μ comme coordonnées cartésiennes, mais il apparaît dans S un champ gravitationnel dit non permanent. Par conséquent, les équations (I-5) peuvent être aussi interprétées comme équations de Maxwell en présence d'un champ gravitationnel non permanent. Les x^μ étant supposés des coordonnées cartésiennes, les ∇_μ sont alors des symboles purement conventionnels.

Comme il ne doit pas y avoir de différence essentielle entre un champ gravitationnel non permanent et un champ gravitationnel permanent, les équations de Maxwell, en présence d'un champ gravitationnel permanent, doivent être aussi de la forme

$$\text{a) } \hat{\nabla}_\nu \hat{F}^{\mu\nu} = 0 \,, \qquad \text{b) } \hat{\nabla}_\lambda F_{\mu\nu} + \hat{\nabla}_\mu F_{\nu\lambda} + \hat{\nabla}_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \,, \tag{I-6}$$

$$\text{c) } \hat{F}^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\rho}\, \hat{g}^{\nu\sigma}\, F_{\rho\sigma} \qquad (F_{\rho\sigma} = \hat{\nabla}_\rho A_\sigma - \hat{\nabla}_\sigma A_\rho) \,,$$

où les $\hat{\nabla}_\nu$ sont aussi des symboles conventionnels relatifs aux $\hat{g}_{\mu\nu}(x^\alpha)$. Par analogie avec le cas du champ gravitationnel non permanent, nous posons aussi

$$\hat{g}_{\mu\nu} = h_\mu^{(\rho)}\, h_\nu^{(\sigma)}\, \eta_{\rho\sigma} \,. \tag{I-7}$$

Mais, le champ gravitationnel étant permanent, les $h_\mu^{(\rho)}(x^\alpha)$ sont maintenant 16 fonctions *indépendantes* et n'obéissent plus aux conditions (I-3). La variété de configuration V_4 munie de la métrique

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{\mu\nu}(x^\alpha)\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{I-8}$$

est alors une variété pseudo-riemannienne.

([4]) Par exemple, si S tourne autour de son axe Oz avec une vitesse de rotation uniforme ω (expérience du disque tournant), on aurait alors ([19*a*] p. 240)

$$ds^2 = -\left[dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2\,\omega\,(x\,dy - y\,dx)\,dt\right] + \left[c^2 - \omega^2\,(x^2 + y^2)\right] dt^2 \,.$$

Les quatre fonctions $\varphi^\rho(x^\alpha)$ seront données par

$$\varphi^1 = x\cos\omega t - y\sin\omega t \,, \qquad \varphi^2 = x\sin\omega t + y\cos\omega t \,, \qquad \varphi^3 = z \,, \qquad \varphi^0 = c\,t \,.$$

La comparaison de (I-4) à (I-6) montre qu'on peut déduire du principe d'équivalence le théorème suivant.

Théorème II. — *L'effet du champ gravitationnel sur les lois de la physique est de remplacer le tenseur $\eta_{\mu\nu}$ par le tenseur $\hat{g}_{\mu\nu}$ et les ∂_μ par les $\hat{\nabla}_\mu$.*

Bien entendu, après ce remplacement l'espace-temps est toujours l'espace minkowskien M_4 et les x^μ restent toujours les coordonnées cartésiennes de M_4. Cependant ces x^μ constituent en même temps un système de coordonnées locales d'un point de la variété de configuration V_4 [comme dans (0-1) les x^μ constituaient aussi un système de coordonnées locales d'un point de la variété newtonienne].

Une autre application importante du théorème II est l'obtention des équations du mouvement d'une particule d'épreuve ponctuelle.

Dans le vide et en l'absence de champ gravitationnel, ces équations s'écrivent $u^\nu \partial_\nu u^\mu = 0$, avec

$$u^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s\,, \qquad \mathrm{d}s = \sqrt{\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu}\,.$$

En présence d'un champ gravitationnel, ces équations s'écrivent

$$\hat{u}^\nu \hat{\nabla}_\nu \hat{u}^\mu = 0\,, \tag{I-9}$$

avec

$$\hat{u}^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\hat{s}\,, \qquad \mathrm{d}\hat{s} = \sqrt{\hat{g}_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu}\,.$$

Nous avons donc : *les trajectoires d'une particule d'épreuve ponctuelle dans un champ gravitationnel sont des géodésiques de* V_4.

A partir de cette conclusion nous pourrons alors trouver l'expression de l'intégrale d'action de la particule d'épreuve, puis les équations du champ, d'après la méthode d'invariance indiquée dans l'introduction. Nous obtiendrons ainsi une théorie minkowskienne de la gravitation fondée sur le seul principe d'équivalence, c'est-à-dire sur un minimum d'hypothèses possible.

Remarque. — Pour la relativité générale qui admet le principe de relativité généralisée, l'observateur d'un système quelconque est forcé de croire à ses étalons, n'ayant pas d'étalons privilégiés pour comparer. Il est donc obligé de conclure que le champ d'inertie modifie la géométrie de son espace, d'où, par le principe d'équivalence, il conclut aussi que le champ gravitationnel modifie la géométrie de son espace.

Notons aussi que : si le principe d'équivalence a été vérifié avec une grande précision par les expériences, le principe de relativité généralisée, qui est d'une importance capitale pour la conception de l'espace-temps de la relativité générale, n'a été mis en évidence par aucune expérience, alors que l'hypothèse d'un espace-temps minkowskien absolu a été vérifiée par l'expérience de Michelson.

2. **Le potentiel gravitationnel.** — Nous devons chercher maintenant à définir la relation entre le tenseur métrique minkowskien de l'espace-temps, le tenseur métrique riemannien de la variété de configuration V_4 et le potentiel gravitationnel.

Les équations (I-7) sont celles utilisées par R. Utiyama, C. Møller, E. Schücking, etc. Dans ces formalismes le potentiel gravitationnel est décrit par un ensemble de quatre tétrades $h^{(\rho)}$, de composantes covariantes $h^{(\rho)}_\mu$. Mais dans ce travail nous définissons le potentiel gravitationnel par les relations suivantes :

(I-10) $$\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\,\psi_{\mu\nu}\,.$$

Dans (I-10) le potentiel gravitationnel est décrit par un tenseur du second ordre de composantes $\psi_{\mu\nu}$. Les relations (I-10) nous conduiront au formalisme de N. Rosen. Cependant, que le potentiel soit décrit par un ensemble de quatre tétrades ou par un tenseur du second ordre, il ne se manifestera qu'à travers le tenseur $\hat{g}_{\mu\nu}$. Cette propriété du champ gravitationnel est la conséquence directe du principe d'équivalence.

Les dérivées du potentiel gravitationnel et, par suite, du tenseur $\hat{g}_{\mu\nu}$ peuvent présenter des discontinuités lorsqu'on passe de la matière au vide. Par conséquent, nous adopterons avec A. Lichnerowicz les hypothèses suivantes :

V_4 est de classe C^2, C^4 par morceaux ;

les fonctions $\hat{g}_{\mu\nu}(x^\alpha)$ sont de classes C^1, C^3 par morceaux.

Il est évident, d'après (I-10), que lorsque le potentiel gravitationnel est nul, on a $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, en particulier quand les x^μ tendent vers ∞.

Les équations (I-10) peuvent se généraliser au cas où les coordonnées x^μ de l'espace-temps ne sont plus des coordonnées cartésiennes mais quelconques. Si l'on désigne par $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ les composantes du tenseur métrique de l'espace-temps dans un système de coordonnées curvilignes $\{ x^\mu \}$, les formules (I-10) peuvent se généraliser ainsi :

(I-11) $$\hat{g}_{\mu\nu}(x^\alpha) = g_{\mu\nu}(x^\alpha) + 2\,\psi_{\mu\nu}(x^\alpha)\,.$$

Dans ce travail, pour des raisons de covariance, nous supposerons toujours (sauf mention expresse du contraire) que l'espace-temps est rapporté à un système de coordonnées quelconques.

Nous définissons les matrices inverses $g^{\mu\nu}$, $\hat{g}^{\mu\nu}$ de $g_{\mu\nu}$, $\hat{g}_{\mu\nu}$ par $g_{\mu\rho}\,g^{\nu\rho} = \hat{g}_{\mu\rho}\,\hat{g}^{\nu\rho} = \delta_\mu^\nu$.

Remarque. — Dans un tout autre ordre d'idées, M.-A. Tonnelat et S. Lederer ont démontré [31] que, dans une théorie minkowskienne de la gravitation, les identités de conservation peuvent s'écrire sous une forme analogue à celle de la relativité générale en utilisant un tenseur métrique du type (I-11). La démonstration s'appuie sur le théorème de Noether et utilise aussi le principe d'équivalence.

3. **Expressions des coefficients de la connexion affine et du tenseur de courbure de V_4.** — Portant (I-11) dans l'expression des coefficients de la connexion affine de V_4,

$$\left\{ \begin{matrix} \hat{\rho} \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\,\hat{g}^{\rho\sigma}\,(\partial_\mu \hat{g}_{\nu\sigma} + \partial_\nu \hat{g}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \hat{g}_{\mu\nu})\,,$$

on obtient

(I-12) $$\left\{ \begin{matrix} \hat{\rho} \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \Delta^\rho_{\mu\nu}\,,$$

où les $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ sont des coefficients de la connexion minkowskienne :

$$\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\,g^{\rho\sigma}\,(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

et

(I-13) $$\Delta^\rho_{\mu\nu} = \hat{g}^{\rho\sigma}\,(\nabla_\mu \psi_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \psi_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \psi_{\mu\nu}) = \tfrac{1}{2}\,\hat{g}^{\rho\sigma}\,(\nabla_\mu \hat{g}_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \hat{g}_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \hat{g}_{\mu\nu})\,,$$

∇_μ désignant l'opérateur de dérivation covariante relatif aux $g_{\mu\nu}$.

On reconnaît dans (I-12) la formule de décomposition de N. Rosen [24]. Les $\Delta^{\circ}_{\mu\nu}$ seront interprétés comme composantes du champ gravitationnel.

Portant (I-12) dans l'expression du tenseur de Riemann de V_4,

$$\text{(I-14)} \qquad \widehat{R}^{\circ}_{\mu\nu\sigma} = \partial_\sigma \left\{ \begin{matrix} \widehat{\rho} \\ \mu\,\nu \end{matrix} \right\} - \partial_\nu \left\{ \begin{matrix} \widehat{\rho} \\ \mu\,\sigma \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \widehat{\lambda} \\ \mu\,\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \widehat{\rho} \\ \lambda\,\sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \widehat{\lambda} \\ \mu\,\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \widehat{\rho} \\ \lambda\,\nu \end{matrix} \right\},$$

on obtient $\widehat{R}^{\circ}_{\mu\nu\sigma} = R^{\circ}_{\mu\nu\sigma} + K^{\circ}_{\mu\nu\sigma}$, où $R^{\circ}_{\mu\nu\sigma}$ est le tenseur de Riemann formé avec la connexion minkowskienne $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\,\nu \end{matrix} \right\}$: $R^{\circ}_{\mu\nu\sigma} \equiv 0$ et

$$\text{(I-15)} \qquad K^{\circ}_{\mu\nu\sigma} = \nabla_\sigma \Delta^{\circ}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \Delta^{\circ}_{\mu\sigma} + \Delta^{\lambda}_{\mu\nu}\, \Delta^{\circ}_{\lambda\sigma} - \Delta^{\lambda}_{\mu\sigma}\, \Delta^{\circ}_{\lambda\nu} .$$

On en déduit l'expression du tenseur de Ricci :

$$\text{(I-16)} \qquad \widehat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} \qquad (R_{\mu\nu} \equiv 0,\ K_{\mu\nu} = K^{\circ}_{\mu\nu\rho}) .$$

Les formules (I-15) et (I-16) montrent que pour calculer $\widehat{R}^{\circ}_{\mu\nu\sigma}$ et $\widehat{R}_{\mu\nu}$ en fonction des $\Delta^{\circ}_{\mu\nu}$ il suffit d'appliquer la règle de correspondance suivante (appelée règle de Rosen) :

$$\text{(I-17)} \qquad \partial_\rho \to \Delta_\rho , \qquad \left\{ \begin{matrix} \widehat{\rho} \\ \mu\,\nu \end{matrix} \right\} \to \Delta^{\circ}_{\mu\nu} .$$

4. **Equations du mouvement d'une particule d'épreuve ponctuelle.** — D'après (I-9), l'intégrale d'action d'une particule d'épreuve dans un champ gravitationnel s'écrit

$$\text{(I-18)} \qquad I_{\mathrm{p}} = - m\, c \int_{\mathrm{C}} \sqrt{\widehat{g}_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu} .$$

L'intégrale du second membre de (I-18) est évaluée le long d'un arc de courbe C de l'espace-temps et nous supposons que C est orienté dans le temps.

On peut constater que l'intégrale d'action I_{p} ne comporte qu'un seul terme, alors qu'en électromagnétisme elle possède deux termes [cf. formule (0-2)]. Ceci peut s'expliquer de la façon suivante.

Considérons le cas d'une particule chargée. Lorsque le champ électromagnétique est nul, l'état de la particule est *une masse libre* car, lorsque le champ extérieur est nul, la charge ne se manifeste pas et on considère la particule comme neutre.

Quand le champ électromagnétique apparaît, l'état de la particule est *une masse libre + une charge en interaction avec le champ électromagnétique.* L'intégrale d'action correspondante doit donc comporter deux termes.

Dans le cas gravitationnel, lorsque le champ gravitationnel est nul, l'état de la particule est *une masse libre.*

Quand le champ extérieur apparaît, l'état de la particule est *une masse en interaction avec le champ gravitationnel.* On voit donc que l'intégrale d'action correspondante ne peut comporter qu'un seul terme. Ce terme doit être tel que, quand le champ gravitationnel tend vers 0, l'intégrale d'action de la particule tend vers celle d'une particule libre. L'expression (I-18) correspond bien à cette condition.

Evidemment dans le raisonnement précédent nous avons fait usage de l'équivalence entre la masse inerte et la masse grave.

Si nous représentions paramétriquement l'arc de courbe C à l'aide d'un paramètre arbitraire τ, (I-18) s'écrirait

$$\text{(I-19)} \qquad I_{\mathrm{p}} = - m\, c \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Lambda(x^\mu, \dot{x}^\nu)\, \mathrm{d}\tau ,$$

avec

(I-20) $$\Lambda(x^\mu, \dot{x}^\nu) = \sqrt{\hat{g}_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu} \qquad (\dot{x}^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau)\,.$$

Les équations du mouvement de la particule d'épreuve sont celles réalisant l'extremum de l'intégrale d'action (I-19) *pour des variations à extrémités fixes.*

Calculons la variation de (I-19) pour une variation quelconque à extrémités fixes :

$$\delta I_\mathrm{p} = -\,m\,c\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu}\,\delta x^\mu + \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{x}^\mu}\,\delta\dot{x}^\mu\right)\mathrm{d}\tau$$

ou, en intégrant par parties,

$$\delta I_\mathrm{p} = -\,m\,c\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{x}^\mu}\right)\right]\delta x^\mu\,\mathrm{d}\tau\,.$$

La condition d'extremum $\delta I_\mathrm{p} = 0$ entraîne alors les équations du mouvement

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{x}^\mu}\right) = 0\,.$$

D'après (I-20), nous avons

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu} = \frac{\partial_\mu\hat{g}_{\rho\sigma}\,\dot{x}^\rho\,\dot{x}^\sigma}{2\sqrt{\hat{g}_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta}}\,, \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{x}^\mu} = \frac{\hat{g}_{\mu\nu}\,\dot{x}^\nu}{\sqrt{\hat{g}_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta}}\,.$$

Les équations du mouvement s'écrivent donc

$$\dot{x}^\rho\,\partial_\rho\left(\frac{\hat{g}_{\mu\nu}\,\dot{x}^\nu}{\sqrt{\hat{g}_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta}}\right) - \frac{\partial_\mu\hat{g}_{\rho\sigma}\,\dot{x}^\rho\,\dot{x}^\sigma}{2\sqrt{\hat{g}_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta}} = 0$$

ou

(I-21) $$\dot{x}^\rho\,\partial_\rho\dot{x}^\mu + \left\{\begin{matrix}\hat{\mu}\\ \rho\ \sigma\end{matrix}\right\}\dot{x}^\rho\,\dot{x}^\sigma - \dot{x}^\mu\,\dot{x}^\rho\,\partial_\rho\mathrm{Log}\sqrt{\hat{g}_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta} = 0\,.$$

Si nous prenons $\tau = \hat{s}$ avec $\mathrm{d}\hat{s}^2 = \hat{g}_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$, le dernier terme du premier membre de (I-21) est nul et nous obtenons

(I-22) $$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\hat{s}^2} + \left\{\begin{matrix}\hat{\mu}\\ \rho\ \sigma\end{matrix}\right\}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\hat{s}}\,\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\hat{s}} = 0\,.$$

Les équations (I-22) sont les équations du mouvement d'Einstein.

Mais dans les équations du mouvement on prend, en général, pour paramètre l'abscisse curviligne s sur l'arc de courbe C. Les équations du mouvement (I-21) s'écrivent alors

(I-23) $$u^\rho\,\partial_\rho u^\mu + \left\{\begin{matrix}\hat{\mu}\\ \rho\ \sigma\end{matrix}\right\}u^\rho\,u^\sigma - u^\mu\,u^\rho\,\partial_\rho\mathrm{Log}\sqrt{\hat{g}_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta} = 0\,,$$

avec $u^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s$, $u^\mu\,u_\mu = g_{\mu\nu}\,u^\mu\,u^\nu = 1$. (I-23) s'écrit encore

(I-24) $$u^\rho\,\nabla_\rho u^\mu + \Delta^\mu_{\rho\sigma}\,u^\rho\,u^\sigma - u^\mu\,u^\rho\,\partial_\rho\mathrm{Log}\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta} = 0\,.$$

Puisque l'intégrale d'action I_p est indépendante du paramètre, les équations (I-21), (I-22) et (I-24) sont équivalentes.

On déduit de (I-24) l'expression de la force gravitationnelle

(I-25) $$F^\mu = m\,c^2\,(-\Delta^\mu_{\rho\sigma}\,u^\rho\,u^\sigma + u^\mu\,u^\rho\,\partial_\rho\mathrm{Log}\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta})\,.$$

Contractant les deux membres de (I-24) par u_μ, il vient

$$u^\rho\,\partial_\rho\mathrm{Log}\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta} = \Delta^\mu_{\rho\sigma}\,u^\rho\,u^\sigma\,u_\mu\,.$$

Portant cette équation dans (I-25), il vient

$$F^\mu = m\,c^2\,(-\Delta^\mu_{\rho\sigma}\,u^\rho\,u^\sigma + u^\mu\,\Delta^\lambda_{\rho\sigma}\,u^\rho\,u^\sigma u_\lambda)\,. \tag{I-26}$$

L'expression (I-26) montre que F^μ satisfait à la relation d'orthogonalité $F^\mu\,u_\mu = 0$.

5. **Equations du champ.** — Considérons maintenant l'intégrale d'action du système champ + particule d'épreuve :

$$I = I_\mathrm{p} + I_\mathrm{ch}\,, \tag{I-27}$$

où I_p est donné par (I-18) et

$$I_\mathrm{ch} = \frac{1}{c}\int_\mathrm{D} \mathcal{L}\,\mathrm{d}^4x \qquad (\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3\,\mathrm{d}x^0)\,, \tag{I-28}$$

avec

$$\text{a)}\quad \mathcal{L} = \sqrt{-g}\,L(g_{\mu\nu},\,\psi_{\mu\nu},\,\Delta^\rho_{\mu\nu},\,\nabla_\sigma\Delta^\rho_{\mu\nu})\,, \tag{I-29}$$

$$\text{b)}\quad \mathcal{L} = \sqrt{-\hat{g}}\,\hat{L}(\hat{g}_{\mu\nu},\,\partial_\rho\hat{g}_{\mu\nu},\,\partial_\rho\partial_\sigma\hat{g}_{\mu\nu})\,.$$

La condition (I-29a) vient du fait que la théorie est minkowskienne. La condition (I-29b) obéit au principe d'équivalence qui exige que le potentiel ne devrait se manifester qu'à travers le tenseur $\hat{g}_{\mu\nu}$.

Dans le cas d'un système de particules ponctuelles, l'intégrale d'action I_p s'écrit

$$I_\mathrm{p} = -\sum m\,c\int_\mathrm{C}\sqrt{\hat{g}_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu}\,, \tag{I-30}$$

où dans chaque intégrale de la somme $\sum$, $\hat{g}_{\mu\nu}(x^\alpha)$ prend sa valeur au point de masse m.

Nous définissons une densité de masse μ par [5]

$$\mu = \sum_\mathrm{N} m_\mathrm{N}\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_\mathrm{N})\,, \tag{I-31}$$

où $\vec{x}_\mathrm{N}$ est la position d'espace de la masse m_N et δ^3 la « fonction » (distribution) de Dirac. (I-30) s'écrit alors

$$I_\mathrm{p} = -\int_\mathrm{V}\int_\mathrm{C}\mu\,c\,\sqrt{\hat{g}_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3\,, \tag{I-32}$$

où l'on a remplacé la somme sur les masses ponctuelles par une intégrale sur le volume V contenant ces masses.

Posons maintenant

$$\mu = \mu_0\sqrt{-g}\,\mathrm{d}x^0/\mathrm{d}s\,; \tag{I-33}$$

μ_0 est la densité de masse propre du système des particules. Lorsque les coordonnées de l'espace-temps sont cartésiennes, (I-33) s'écrira

$$\mu = \mu_0/\sqrt{1-\beta^2} \qquad (\beta = v/c)\,.$$

(I-32) s'écrit maintenant

$$I_\mathrm{p} = -\int_\mathrm{D}\mu_0\,c\,\Lambda(x^\mu,\,u^\nu)\,\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x\,,$$

avec $\Lambda(x^\mu,\,u^\nu) = \sqrt{\hat{g}_{\mu\nu}\,u^\mu\,u^\nu}$.

[5] Ici et dans les chapitres suivants nous utiliserons toujours la convention de L. Landau & E. Lifshitz ([16] § 27 et 28) pour passer d'une somme d'intégrales curvilignes à une intégrale quadridimensionnelle. Cf. aussi A. Trautman [32*b*].

L'intégrale d'action du système champ + particules s'écrit alors

$$(\text{I-34}) \qquad I = -\int_D \mu_0 \, c \, \Lambda(x^\mu, u^\nu) \sqrt{-g} \, d^4x + \frac{1}{c} \int_D \mathcal{L} \, d^4x \, .$$

1. Premier groupe des équations du champ. — En électromagnétisme, le premier groupe des équations du champ s'écrit $\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} = 0$. Ces équations sont dues uniquement à la définition du champ électromagnétique $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$.

En gravitation, on a, d'après (I-13),

$$(\text{I-35}) \qquad \hat{g}_{\mu\rho} \Delta^\rho_{\nu\lambda} + \hat{g}_{\nu\rho} \Delta^\rho_{\lambda\mu} = 2 \nabla_\lambda \psi_{\mu\nu} \, .$$

Par analogie avec l'électromagnétisme, les équations (I-35) s'appelleront le premier groupe des équations du champ de la gravitation. Elles peuvent être aussi obtenues des équations

$$\hat{g}_{\mu\rho} \left\{ \begin{matrix} \hat{\rho} \\ \nu \, \lambda \end{matrix} \right\} + \hat{g}_{\nu\rho} \left\{ \begin{matrix} \hat{\rho} \\ \lambda \, \mu \end{matrix} \right\} = \partial_\lambda \hat{g}_{\mu\nu}$$

par la règle de correspondance de Rosen.

2. Deuxième groupe des équations du champ. — Le deuxième groupe des équations du champ de la gravitation est le groupe des équations *réalisant l'extremum de l'intégrale d'action* (I-34) *pour des variations* $\delta\psi_{\mu\nu}$ *et* $\delta\partial_\rho\psi_{\mu\nu}$ *s'annulant à la limite du domaine d'intégration.*

On a, pour une variation des $\psi_{\mu\nu}$,

$$\delta I = -\int_D \mu_0 \, c \, \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi_{\mu\nu}} \, \delta\psi_{\mu\nu} \sqrt{-g} \, d^4x + \\ - \frac{1}{c} \int_D \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\mu\nu}} \delta\psi_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \psi_{\mu\nu})} \delta(\partial_\rho \psi_{\mu\nu}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma \psi_{\mu\nu})} \delta(\partial_\rho \partial_\sigma \psi_{\mu\nu}) \right] d^4x \, .$$

Intégrons par parties les deux derniers termes, en utilisant le théorème de Stokes et en admettant $\delta\psi_{\mu\nu} = 0$, $\delta\partial_\rho\psi_{\mu\nu} = 0$ à la limite du domaine d'intégration ; nous obtenons

$$\delta I = \frac{1}{c} \int_D (L^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}) \, \delta\psi_{\mu\nu} \sqrt{-g} \, d^4x \, ,$$

avec

$$(\text{I-36}) \qquad L^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_{\mu\nu}} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \psi_{\mu\nu})} \right) + \partial_\rho \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma \psi_{\mu\nu})} \right) \right] ,$$

$$(\text{I-37}) \qquad M^{\mu\nu} = \mu_0 \, c^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi_{\mu\nu}} = 2 \, \mu_0 \, c^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\mu_0 \, c^2 \, u^\mu \, u^\nu}{\sqrt{1 + 2 \, \psi_{\alpha\beta} \, u^\alpha \, u^\beta}} \, .$$

Nous en déduisons les équations du champ

$$(\text{I-38}) \qquad L^{\mu\nu} - M^{\mu\nu} = 0 \, .$$

Le tenseur $M^{\mu\nu}$ sera appelé tenseur matériel d'impulsion-énergie de la répartition des masses en présence du champ gravitationnel. Si le champ gravitationnel est nul, on retrouve l'expression du tenseur matériel d'impulsion-énergie d'un système de particules libres : $M^{\mu\nu} = \mu_0 \, c^2 \, u^\mu \, u^\nu$.

On peut aussi interpréter (I-37) en disant que le champ gravitationnel modifie la densité de masse propre μ_0 car, en définissant une nouvelle densité de masse propre $\mu'_0 = \mu_0 / \sqrt{1 + 2 \, \psi_{\alpha\beta} \, u^\alpha \, u^\beta}$, on obtient $M^{\mu\nu} = \mu'_0 \, c^2 \, u^\mu \, u^\nu$.

6. **Equation de continuité. Identités du champ.** — Supposons que la répartition des masses présente certaines symétries (6). Il est évident que dans ce cas l'intégrale I_p est invariante par rapport au groupe de symétrie correspondant. Si ce groupe est engendré par des transformations infinitésimales du type

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon\, \Xi^\mu \,, \tag{I-39}$$

ε étant une quantité petite, on devrait alors avoir

$$I_p = -\, m\, c \int_C \sqrt{\hat{g}_{\mu\nu}(x^\rho)\, dx^\mu\, dx^\nu}$$

$$= -\, m\, c \int_C \sqrt{\hat{g}_{\mu\nu}(x^\rho + \varepsilon\, \Xi^\rho)\, d(x^\mu + \varepsilon\, \Xi^\mu)\, d(x^\nu + \varepsilon\, \Xi^\nu)} \,,$$

d'où

$$\partial_\rho \hat{g}_{\mu\nu}\, \Xi^\rho + \hat{g}_{\rho\nu}\, \partial_\mu \Xi^\rho + \hat{g}_{\mu\rho}\, \partial_\nu \Xi^\rho = 0 \,. \tag{I-40}$$

Par conséquent, la transformation spéciale de la théorie est la suivante :

$$\psi_{\mu\nu} \to \psi_{\mu\nu} + \varepsilon\, \Phi_{\mu\nu} \,, \tag{I-41}$$

avec

$$\Phi_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\, (\partial_\rho \hat{g}_{\mu\nu}\, \Xi^\rho + \hat{g}_{\rho\nu}\, \partial_\mu \Xi^\rho + \hat{g}_{\mu\rho}\, \partial_\nu \Xi^\rho) \,. \tag{I-42}$$

Soit δI_p la variation de I_p à extrémités fixes (hypothèse du principe d'extremum pour les équations du mouvement) et δI_{ch} la variation de I_{ch} pour des variations $\delta\psi_{\mu\nu}$, $\delta\partial_\rho\psi_{\mu\nu}$ nulles à la limite du domaine d'intégration (hypothèse du principe d'extremum pour les équations du champ). Nous allons maintenant écrire que δI_p et δI_{ch} sont invariants par rapport à la transformation (I-41), pour obtenir l'équation de continuité et un système d'identités du champ.

1. Equation de continuité. — Dans la transformation (I-41), l'intégrale I_p se transforme en

$$I_p + J_p = -\sum m\, c \int_C \sqrt{(\hat{g}_{\mu\nu} + 2\, \varepsilon\, \Phi_{\mu\nu})\, dx^\mu\, dx^\nu} \,.$$

On en déduit

$$J_p = -\sum m\, c \int_C \frac{\varepsilon\, \Phi_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu}{\sqrt{\hat{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\rho}}$$

ou, en utilisant les notations de (I-31), (I-33), (I-37),

$$J_p = -\frac{1}{c} \int_D M^{\mu\nu}\, \varepsilon\, \Phi_{\mu\nu} \sqrt{-g}\, d^4x \,. \tag{I-43}$$

Remplaçant les $\Phi_{\mu\nu}$ par leur expression (I-42) puis intégrant les termes $\partial_\nu \Xi^\rho$ et $\partial_\mu \Xi^\rho$ par parties, nous obtenons

$$J_p = \frac{1}{c} \int_D \left[\partial_\nu (\sqrt{-g}\, \hat{g}_{\mu\rho}\, M^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, M^{\mu\nu}\, \partial_\rho \hat{g}_{\mu\nu} \right] \Xi^\rho\, \varepsilon\, d^4x \,. \tag{I-44}$$

Dans (I-44) nous avons supprimé les intégrales de surface car, d'après l'hypothèse du principe d'extremum pour les équations du mouvement, les variations de ces intégrales de surface seront nulles.

(I-43) montre, d'après (I-40), que $J_p = 0$. On a donc

$$\partial_\nu (\sqrt{-g}\, \hat{g}_{\mu\rho}\, M^{\mu\nu}) - \tfrac{1}{2} \sqrt{-g}\, M^{\mu\nu}\, \partial_\rho \hat{g}_{\mu\nu} = 0$$

(6) Ces symétries sont, bien entendu, des symétries dans l'espace-temps minkowskien.

ou, sous forme covariante (minkowskienne),

(I-45) $$\nabla_\nu(\widehat{g}_{\mu\rho}\, M^{\mu\nu}) - \tfrac{1}{2}\, M^{\mu\nu}\, \nabla_\rho \widehat{g}_{\mu\nu} = 0\,.$$

Portant (I-37) dans (I-45), nous obtenons

(I-46) $$\mu_0\, c^2\, u^\nu \nabla_\nu \frac{\widehat{g}_{\mu\rho}\, u^\mu}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta}} + \frac{c^2\, \widehat{g}_{\mu\rho}\, u^\mu\, \nabla_\nu(\mu_0\, u^\nu)}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta}} - \frac{1}{2}\, \frac{\mu_0\, c^2\, u^\mu\, u^\nu\, \nabla_\rho \widehat{g}_{\mu\nu}}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta}} = 0\,.$$

Nous avons, d'autre part,

$$\widehat{g}_{\rho\mu}\, \frac{u^\rho}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta}}\, \frac{u^\mu}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta}} = 1\,.$$

D'où, en prenant la dérivée covariante $u^\nu\, \nabla_\nu$ des deux membres de cette dernière équation,

(I-47) $$2\, u^\rho\, u^\nu \nabla_\nu \frac{\widehat{g}_{\mu\rho}\, u^\mu}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta}} - \frac{u^\rho\, u^\mu\, u^\nu\, \nabla_\nu \widehat{g}_{\mu\rho}}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta}} = 0\,.$$

Multipliant les deux membres de (I-46) par u^ρ et tenant compte de (I-47), nous obtenons

(I-48) $$\nabla_\nu(\mu_0\, u^\nu) = 0\,.$$

L'équation (I-48) est l'équation de continuité de la gravitation.

2. Identités du champ. — Dans la transformation (I-41), I_{ch} se transforme en $I_{\text{ch}} + J_{\text{ch}}$, avec

$$J_{\text{ch}} = \frac{1}{c} \int_D \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\mu\nu}}\, \Phi_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \psi_{\mu\nu})}\, \partial_\rho \Phi_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma \psi_{\mu\nu})}\, \partial_\rho \partial_\sigma \Phi_{\mu\nu} \right] \varepsilon\, \mathrm{d}^4 x\,.$$

Intégrant les deux derniers termes de J_{ch} par parties, nous obtenons

(I-49) $$J_{\text{ch}} = \frac{1}{c} \int_D \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_{\mu\nu}}\, \Phi_{\mu\nu}\, \varepsilon\, \mathrm{d}^4 x = \frac{1}{c} \int_D L^{\mu\nu}\, \Phi_{\mu\nu}\, \varepsilon \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x\,.$$

Dans (I-49) nous avons aussi supprimé les intégrales de surface car, d'après l'hypothèse du principe d'extremum pour les équations du champ, les variations de ces intégrales de surface sont nulles.

(I-49) montre, d'après (I-40), que l'on a bien $J_{\text{ch}} = 0$. Remplaçant $\Phi_{\mu\nu}$ par leur expression (I-42) et intégrant les termes en $\partial_\nu \Xi^\rho$ et $\partial_\mu \Xi^\rho$ par parties, nous obtenons

$$J_{\text{ch}} = -\frac{1}{c} \int_D \left[\partial_\nu(\sqrt{-g}\, \widehat{g}_{\mu\rho}\, L^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, L^{\mu\nu}\, \partial_\rho \widehat{g}_{\mu\nu} \right] \Xi^\rho\, \varepsilon\, \mathrm{d}^4 x \equiv 0\,.$$

Nous en déduisons

(I-50) $$\frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_\nu(\sqrt{-g}\, \widehat{g}_{\mu\rho}\, L^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\, L^{\mu\nu}\, \partial_\rho \widehat{g}_{\mu\nu} \equiv 0\,,$$

ou, sous forme covariante,

(I-51) $$\nabla_\nu(\widehat{g}_{\mu\rho}\, L^{\mu\nu}) - \tfrac{1}{2}\, L^{\mu\nu}\, \nabla_\rho \widehat{g}_{\mu\nu} \equiv 0$$

ou

(I-52) $$\nabla_\nu L^{\mu\nu} + \Delta^\mu_{\rho\sigma}\, L^{\rho\sigma} \equiv 0\,.$$

Les identités (I-50) à (I-52) sont des identités du champ gravitationnel.

Désignons par $\widehat{S}^{\mu\nu}$ les composantes du tenseur d'Einstein formées avec les $\widehat{g}_{\mu\nu}$:

$$\widehat{S}^{\mu\nu} = \widehat{g}^{\mu\rho}\, \widehat{g}^{\nu\sigma}\, \widehat{S}_{\rho\sigma}\,, \qquad \widehat{S}_{\rho\sigma} = \widehat{R}_{\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}\, \widehat{g}_{\rho\sigma}\, \widehat{R} \qquad (\widehat{R} = \widehat{g}^{\alpha\beta}\, \widehat{R}_{\alpha\beta})\,,$$

où les $\widehat{R}_{\rho\sigma}$ ont été calculés en fonction tensorielle des $\psi_{\mu\nu}$ et $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$ au paragraphe I.3. Les identités (I-50) montrent que

$$\sqrt{-g}\, L^{\mu\nu} = \frac{1}{\chi}\sqrt{-\widehat{g}}\,\widehat{S}^{\mu\nu},$$

où χ est la constante d'Einstein et

(I-53) $$L^{\mu\nu} = \frac{1}{\chi} h\,\widehat{S}^{\mu\nu} \qquad (h = \sqrt{-\widehat{g}}/\sqrt{-g} = \det|\,h^{(\rho)}_{\mu}\,|),$$

est une solution.

Nous pouvons alors prendre $\mathcal{L} = -\frac{1}{2\chi}\sqrt{-\widehat{g}}\,\widehat{R}$ ou

(I-54) $$L = -\frac{1}{2\chi} h\,\hat{R}.$$

Nous obtiendrons ainsi l'expression explicite des équations du champ :

(I-55) $$h\,\widehat{S}^{\mu\nu} = \chi\,\frac{\mu_0\, c^2\, u^{\mu}\, u^{\nu}}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\, u^{\alpha}\, u^{\beta}}}.$$

L'équation (I-54) montre que $\mathcal{L}$ satisfait aux conditions (I-29).

Remarques. a) Si l'on considère les x^{μ} comme coordonnées locales d'un point de la variété V_4, les transformations (I-39) seront alors interprétées comme des transformations infinitésimales du groupe d'isométries de V_4.

b) Au lieu de (I-33), définissons une densité $\widehat{\mu}_0$ telle que

(I-56) $$\mu = \widehat{\mu}_0\sqrt{-\widehat{g}}\,\mathrm{d}x^0/\mathrm{d}\widehat{s}.$$

Comparant (I-33) et (I-56), nous obtenons

$$\mu_0/\widehat{\mu}_0 = h\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}\widehat{s} = h/\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\, u^{\alpha}\, u^{\beta}}.$$

Portant cette équation dans les équations du champ (I-55), nous obtenons

(I-57) $$\widehat{S}^{\mu\nu} = \chi\,\widehat{\mu}_0\, c^2\,\widehat{u}^{\mu}\,\widehat{u}^{\nu} \qquad \left(\widehat{u}^{\nu} = \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\widehat{s}} = \frac{u^{\nu}}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\, u^{\alpha}\, u^{\beta}}}\right).$$

On reconnaît dans (I-57) les équations du champ d'Einstein.

7. **Transformations de jauge.** — Considérons maintenant un deuxième système de coordonnées locales x_1^{μ} de V_4 défini par

(I-58) $$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}(x_1^{\alpha}), \qquad \det|\,\partial\Lambda^{\mu}/\partial x_1^{\alpha}\,| \neq 0.$$

La métrique $\mathrm{d}\widehat{s}^2$ s'écrit alors, dans ces nouvelles coordonnées,

(I-59) $$\mathrm{d}\widehat{s}^2 = \widehat{g}'_{\mu\nu}(x_1^{\alpha})\,\mathrm{d}x_1^{\mu}\,\mathrm{d}x_1^{\nu},$$

avec

(I-60) $$\widehat{g}'_{\mu\nu}(x_1^{\alpha}) = \frac{\partial\Lambda^{\rho}(x_1^{\alpha})}{\partial x_1^{\mu}}\,\frac{\partial\Lambda^{\sigma}(x_1^{\alpha})}{\partial x_1^{\nu}}\,\widehat{g}_{\rho\sigma}[\Lambda^{\alpha}(x_1^{\beta})].$$

Supposons que les fonctions $\Lambda^{\mu}(x_1^{\alpha})$ satisfont aux deux conditions suivantes :

a) $\widehat{g}'_{\mu\nu}(x_1^{\alpha}) \to g_{\mu\nu}(x_1^{\alpha})$ lorsque $x_1^{\alpha} \to \infty$ ou lorsque les masses sont nulles ;

b) les $\widehat{g}'_{\mu\nu}(x^{\alpha})$ satisfont aussi aux équations (I-40).

Ces deux conditions montrent que les $\widehat{g}_{\mu\nu}(x^{\alpha})$ et les $\widehat{g}'_{\mu\nu}(x_1^{\alpha})$ sont équivalents dans la description du champ gravitationnel. Par conséquent, nous pourrons aussi identifier, dans ce cas, les nouvelles coordonnées locales x_1^{α} de V_4 avec les coordon-

nées curvilignes x^α de l'espace-temps M_4. (I-59) s'écrit alors, en supprimant l'indice 1 de x_1^α, $\widehat{ds}^2 = \widehat{g}'_{\mu\nu}(x^\alpha)\, dx^\mu\, dx^\nu$. La nouvelle expression du potentiel gravitationnel est alors donnée par

$$\widehat{g}'_{\mu\nu}(x^\alpha) = g_{\mu\nu}(x^\alpha) + 2\,\psi'_{\mu\nu}(x^\alpha)\,. \tag{I-61}$$

Nous dirons que $\psi_{\mu\nu}(x^\alpha)$ et $\psi'_{\mu\nu}(x^\alpha)$ sont des composantes du potentiel gravitationnel dans deux jauges différentes. Les quatre fonctions $\Lambda^\mu(x^\alpha)$ seront appelées fonctions de jauge. Les transformations de jauge du potentiel gravitationnel sont donc, d'après (I-61),

$$\psi_{\mu\nu}(x^\alpha) \to \psi'_{\mu\nu}(x^\alpha) = \psi_{\mu\nu}(x^\alpha) + \tfrac{1}{2}\left[\widehat{g}'_{\mu\nu}(x^\alpha) - \widehat{g}_{\mu\nu}(x^\alpha)\right]$$

ou, d'après (I-60),

$$\psi_{\mu\nu}(x^\alpha) \to \psi'_{\mu\nu}(x^\alpha) = \psi_{\mu\nu}(x^\alpha) + \Lambda_{\mu\nu}(x^\alpha)\,, \tag{I-62}$$

avec

$$\Lambda_{\mu\nu}(x^\alpha) = \tfrac{1}{2}\left[\partial_\mu\Lambda^\rho(x^\alpha)\,\partial_\nu\Lambda^\sigma(x^\alpha)\,\widehat{g}_{\rho\sigma}[\Lambda^\alpha(x^\beta)] - \widehat{g}_{\mu\nu}(x^\alpha)\right].$$

Par abus de langage, les transformations de coordonnées locales (I-58) de V_4 seront aussi appelées transformations de jauge du champ gravitationnel.

Remarque. — Les équations du mouvement et les équations du champ sont invariantes par rapport aux transformations infinitésimales (I-41) mais ne sont pas, en général, invariantes par rapport aux transformations de jauge (I-62).

8. **Le champ de Schwarzschild.** - Dans ce paragraphe nous allons appliquer la théorie générale au cas d'un champ créé par une masse statique, ponctuelle ou possédant une symétrie sphérique (problème de Schwarzschild).

Dans une théorie minkowskienne de la gravitation, la question de l'énoncé du problème de Schwarzschild ne rencontre pas de difficulté théorique comme en relativité générale [12].

Voici l'énoncé du problème de Schwarzschild : *étant donné un système d'inertie, calculer le potentiel gravitationnel créé par une masse statique, ponctuelle M, placée à l'origine des coordonnées.*

La répartition de masse présente une symétrie sphérique ; par conséquent, l'intégrale I_p est invariante par rapport au groupe des rotations spatiales. Les transformations infinitésimales de ce groupe sont $\overline{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon\,\Xi^\mu$, avec

$$\Xi^\mu = (0, -z, y, 0)\,, \qquad \Xi^\mu = (z, 0, -x, 0)\,, \qquad \Xi^\mu = (-y, x, 0, 0)$$

en coordonnées cartésiennes ou

$$\Xi^\mu = (0, \sin\varphi, \operatorname{cotg}\theta\cos\varphi, 0)\,, \qquad \Xi^\mu = (0, \cos\varphi, -\operatorname{cotg}\theta\sin\varphi, 0)\,,$$
$$\Xi^\mu = (0, 0, 1, 0)$$

en coordonnées sphériques ($x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$).

En écrivant que *l'intégrale I_p est invariante par rapport à ces transformations infinitésimales*, nous obtiendrons pour le $\widehat{ds}^2$ de V_4 la forme suivante :

$$\widehat{ds}^2 = -\alpha^2\,dr^2 - \beta^2 r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) - 2\,\gamma^2\,\boldsymbol{c}\,dr\,dt + \sigma^2\,\boldsymbol{c}^2\,dt^2\,,$$

où α, β, γ, σ sont des fonctions de r. L'indépendance de ces fonctions par rapport au temps vient du fait que le champ est statique (les fonctions $\psi_{\mu\nu}$ sont indépendantes de t).

Nous voulons, d'autre part, que le mouvement soit invariant par rapport au renversement du temps, soit $\vec{x}(t) = \vec{x}(-t)$, $\vec{v}(t) = -\vec{v}(-t)$, où $\vec{x}$ est la posi-

tion spatiale et $\vec{v}$ la vitesse spatiale de la particule d'épreuve. Pour cela, il faut et il suffit que le lagrangien du mouvement [cf. formule (I-19)]

$$-m\,c\,\Lambda(x^\mu, dx^\nu/dt) = -m\,c\,d\hat{s}/dt$$

soit symétrique par rapport au renversement du temps. D'où $\gamma^2 = 0$. Le $d\hat{s}^2$ de V_4 prend alors la forme suivante :

$$\text{(I-63)} \qquad d\hat{s}^2 = -\alpha^2\,dr^2 - \beta^2 r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + \sigma^2 c^2\,dt^2 .$$

Pour que les transformations de jauge (I-58) satisfassent aux deux conditions *a*) et *b*) du paragraphe I.7 et à la condition $\gamma^2 = 0$, il faut et il suffit qu'elles soient de la forme

$$\text{(I-64)} \qquad r = r_1 f(r_1) , \qquad \theta = \theta_1 , \qquad \varphi = \varphi_1 , \qquad t = t_1 ,$$

où $f(r_1)$ est une fonction arbitraire satisfaisant à la condition aux limites $f(r_1) \to 1$ quand $r_1 \to \infty$. Dans le cas particulier du champ de Schwarzschild, le potentiel gravitationnel dépend donc d'une fonction de jauge.

Si nous prenons la fonction de jauge f telle que $f = 1/\beta$, les équations du champ dans le cas extérieur, $\hat{R}_{\mu\nu} = 0$, nous fourniront le $d\hat{s}^2$ de Schwarzschild :

$$d\hat{s}^2 = -\frac{dr^2}{1 - (2\,GM/c^2\,r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2\,GM}{c^2\,r}\right)c^2\,dt^2 .$$

Nous en déduisons l'expression du potentiel gravitationnel (en coordonnées sphériques) :

$$\text{(I-65)} \qquad \psi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}) , \qquad \psi_{11} = \frac{-GM/c^2\,r}{1 - (2\,GM/c^2\,r)} , \qquad \psi_{00} = -\frac{GM}{c^2\,r} .$$

Nous dirons que le potentiel (I-65) est écrit dans la jauge de Schwarzschild.

Le $d\hat{s}^2$ de la variété de Schwarzschild, écrit dans une jauge quelconque, sera obtenu en portant (I-64) dans le $d\hat{s}^2$ de Schwarzschild. Nous obtiendrons ainsi

$$\text{(I-66)} \qquad d\hat{s}^2 = -\frac{(r f' + f)^2\,dr^2}{1 - (2\,GM/c^2\,r f)} - r^2 f^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + \\ + \left(1 - \frac{2\,GM}{c^2\,r\,f}\right)c^2\,dt^2 .$$

En particulier, si $f = [1 + (GM/2\,c^2\,r)]^2$, (I-66) s'écrirait

$$d\hat{s}^2 = -\left(1 + \frac{GM}{2\,c^2\,r}\right)^4 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)] + \frac{[1 - (GM/2\,c^2\,r)]^2}{[1 + (GM/2\,c^2\,r)]^2}\,c^2\,dt^2$$

et le potentiel correspondant (en coordonnées cartésiennes)

$$\psi_{11} = \psi_{22} = \psi_{33} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{GM}{2\,c^2\,r}\right)^4\right], \qquad \psi_{00} = \frac{-GM/c^2\,r}{[1 + (GM/2\,c^2\,r)]^2}$$

est dans la jauge isotropique.

Si $f = 1 + (GM/c^2\,r)$, (I-66) s'écrirait

$$d\hat{s}^2 = -\frac{1 + (GM/c^2\,r)}{1 - (GM/c^2\,r)}\,dr^2 - \\ - r^2\left(1 + \frac{GM}{c^2\,r}\right)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + \frac{1 - (GM/c^2\,r)}{1 + (GM/c^2\,r)}\,c^2\,dt^2$$

et le potentiel correspondant (en coordonnées sphériques)

$$\psi_{11} = \frac{-GM/c^2\,r}{1 - (GM/c^2\,r)} , \qquad \psi_{22} = \frac{\psi_{33}}{\sin^2\theta} = \frac{r^2}{2}\left[1 - \left(1 + \frac{GM}{c^2\,r}\right)^2\right],$$

$$\psi_{00} = \frac{-GM/c^2\,r}{1 + (GM/c^2\,r)}$$

est dans la jauge de Rosen.

Remarque. — Si l'on intégrait les équations du mouvement (I-22) dans le cas (I-66) du $d\hat{s}^2$, on obtiendrait le système d'équations suivant :

$$\text{(I-67)}\quad \begin{cases} \text{a)} & \theta = \pi/2\,, \\ \text{b)} & d\varphi/d\hat{s} = C/\boldsymbol{c}\, r^2\, f^2\,, \\ \text{c)} & dt/d\hat{s} = A/\boldsymbol{c}^2\left[1 - (2\,GM/\boldsymbol{c}^2\, r\, f)\right], \\ \text{d)} & \left[\dfrac{d(1/r)}{d\varphi}\right]^2 + \dfrac{f^2}{(r\,f)'^2}\left(1 - \dfrac{2\,GM}{\boldsymbol{c}^2\, r\, f}\right)\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{2\,f^3\,GM}{C^2\,(r\,f)'^2\,r} + \\ & \qquad + \dfrac{\boldsymbol{c}^2\, f^4}{C^2\,(r\,f)'^2}\left(1 - \dfrac{A^2}{\boldsymbol{c}^2}\right) = 0\,, \end{cases}$$

où C et A sont des constantes d'intégration, avec

$$\text{(I-68)}\qquad C^2 \simeq G\,M\,a\,(1 - e^2)\,, \qquad A \simeq \boldsymbol{c}\,,$$

a étant le demi-grand axe de l'ellipse et e l'excentricité.

On voit donc que les équations du mouvement dépendent de la fonction de jauge f. Ceci vient du fait que l'intégrale d'action du mouvement de la particule d'épreuve (ou au moins la variation δI_p) n'est pas invariante de jauge (cf. la remarque du paragraphe précédent). Cependant, si nous calculons approximativement la dernière équation de (I-67), en posant

$$f = 1 + \frac{\nu}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{GM}{\boldsymbol{c}^2\, r}\,,$$

ν étant un nombre réel, nous obtiendrons l'équation

$$\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} - \frac{GM}{C^2} \simeq \frac{6\,\nu\,G^2\,M^2}{C^2\,\boldsymbol{c}^2\,r} - 3\,(\nu - 1)\frac{GM}{\boldsymbol{c}^2\,r^2}\,.$$

L'avance du périhélie des planètes pendant une révolution sera alors $\delta\varpi = 6\,\pi\,GM/a\,\boldsymbol{c}^2\,(1 - e^2)$ *quel que soit* ν. Par conséquent, bien que les équations du mouvement dépendent de f, cette dépendance sera pratiquement inobservable.

II. Invariance et conservation en gravitation

Dans le chapitre précédent nous avons construit une théorie minkowskienne de la gravitation einsteinienne (ou théorie semi-einsteinienne [21]), analogue à la théorie maxwellienne. Dans ce chapitre nous établirons les lois de conservation de la théorie.

L'espace-temps est homogène et isotrope. D'autre part, le lagrangien du champ gravitationnel est une densité scalaire formée avec le potentiel tensoriel. Par conséquent, l'intégrale d'action du champ gravitationnel comme celle du champ électromagnétique, est invariante par rapport :

a) au groupe d'isométries (déplacements) de l'espace-temps

$$\text{(II-1)}\qquad \bar{x}^\mu = f^\mu(x^\alpha, a^i)\,,$$

où les a^i sont des paramètres, $i = 1, 2, 3, \ldots, 10$, $a^i = 0$ correspond à $\bar{x}^\mu = x^\mu$. Les fonctions $f^\mu(x^\alpha, a^i)$ satisfont aux équations différentielles

$$\text{(II-2)}\qquad g_{\mu\nu}(x^\alpha) = g_{\rho\sigma}\left[f^\alpha(x^\beta, a^i)\right]\frac{\partial f^\rho}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\nu}\,, \qquad \text{dét}\left|\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}\right| \neq 0\,.$$

Lorsque les coordonnées de l'espace-temps seront des coordonnées cartésiennes, les transformations (II-1) s'écriront

(II-3) $$\bar{x}^\mu = (\delta^\mu_\nu + a^\mu_\nu)\, x^\nu + b^\mu$$

et les conditions (II-2) seront alors $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\rho\sigma}\,(\delta^\rho_\mu + a^\rho_\mu)\,(\delta^\sigma_\nu + a^\sigma_\nu)$. On pourrait retrouver (II-1) à partir de (II-3) moyennant des équations des types (I-1) et (I-2) ;

b) au groupe des transformations des coordonnées générales de l'espace-temps :

(II-4) $$x'^\mu = \varphi^\mu(x^\alpha)\,, \qquad \det \mid \partial\varphi^\mu/\partial x^\nu \mid \neq 0\,.$$

Dans cette transformation un tenseur $T^{\rho\sigma\ldots}_{\mu\nu\ldots}(x^\gamma)$ se transformera suivant la formule

$$T'^{\lambda\tau\ldots}_{\alpha\beta\ldots}(x'^\gamma) = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\,\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\sigma}\cdots\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta}\,T^{\rho\sigma\ldots}_{\mu\nu\ldots}\left[x^\gamma(x'^\delta)\right].$$

La transformation (II-1) est une isométrie de l'espace-temps, c'est-à-dire une application bijective de l'espace-temps sur lui-même, le système de référence restant le même, tandis que (II-4) est un changement de système de référence.

La première invariance de l'intégrale d'action va nous fournir dix lois de conservation et la seconde quatre autres.

Les groupes de transformations précédents sont des groupes continus. Par conséquent, nous nous restreindrons seulement aux transformations infinitésimales.

Les transformations infinitésimales de (II-1) sont

(II-5) $$\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu\,,$$

où nous avons posé, pour simplifier la notation, $\xi^\mu = \varepsilon^r\,\xi^\mu_r$, $r = 1, 2, \ldots, 10$; ε^r sont des paramètres infinitésimaux et

$$\xi^\mu_r = \left.\frac{\partial f^\mu(x^\alpha, a^i)}{\partial a^r}\right|_{a^i=0}.$$

Les conditions (II-2) s'écrivent alors

(II-6) $$\nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu = 0 \qquad (\xi_\mu = g_{\mu\nu}\,\xi^\nu)\,.$$

Les transformations infinitésimales de (II-4) sont

(II-7) $$x'^\mu = x^\mu + \alpha^\mu\,,$$

où $\alpha^\mu(x^\alpha)$ sont quatre fonctions infinitésimales s'annulant à la limite du domaine d'intégration de l'intégrale d'action.

1. **Un calcul variationnel.** — Considérons l'intégrale d'action d'un système formé d'un champ relativiste quelconque et de particules d'épreuve. Cette intégrale pourrait s'écrire sous la forme générale

(II-8) $$I = \sum \int_C f(x^\alpha, \mathrm{d}x^\beta) + \frac{1}{c}\int_D \mathcal{L}\,\mathrm{d}^4x\,,$$

avec

$$f(x^\alpha, \mathrm{d}x^\beta) = f(g_{\mu\nu}, \psi_A, \mathrm{d}x^\beta)\,, \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \psi_A, \nabla_\mu\psi_A, \nabla_\mu\nabla_\nu\psi_A)\,,$$

où ψ_A est le potentiel tensoriel du champ et $f(x^\alpha, \mathrm{d}x^\beta)$ une fonction *homogène et du premier degré par rapport aux* $\mathrm{d}x^\beta$.

Les arcs de courbe C sont orientés dans le temps et la seconde intégrale est étendue sur un domaine D de l'espace-temps.

On sait que les intégrales curvilignes de I sont intrinsèquement liées aux arcs C et à f. Nous pourrons donc, sans nuire à la généralité du problème, prendre pour

paramètre des arcs C l'abscisse curviligne réelle s. (II-8) s'écrit alors

$$I = \sum \int_C f(x^\alpha, u^\beta)\, ds + \frac{1}{c}\int_D \mathcal{L}\, d^4x . \tag{II-9}$$

Calculons maintenant la variation de l'intégrale I pour une transformation infinitésimale quelconque des coordonnées :

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu . \tag{II-10}$$

Dans cette transformation on a

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad g_{\mu\nu}(x^\alpha) \to g'_{\mu\nu}(x'^\alpha) = g_{\mu\nu}(x^\alpha) + \delta g_{\mu\nu}(x^\alpha) , \\ &\text{b)} \quad \psi_A(x^\alpha) \to \psi'_A(x'^\alpha) = \psi_A(x^\alpha) + \delta\psi_A(x^\alpha) , \end{aligned} \tag{II-11}$$

avec

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \delta g_{\mu\nu}(x^\alpha) = -\, g_{\rho\nu}\, \partial_\mu \delta x^\rho - g_{\mu\rho}\, \partial_\nu \delta x^\rho , \\ &\text{b)} \quad \delta\psi_A(x^\alpha) = F^{B\nu}_{A\mu}\, \psi_B\, \partial_\nu \delta x^\mu . \end{aligned} \tag{II-12}$$

On définit aussi une variation δ^*, dite variation de Lie ou variation totale :

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad g_{\mu\nu}(x^\alpha) \to g'_{\mu\nu}(x^\alpha) = g_{\mu\nu}(x^\alpha) + \delta^* g_{\mu\nu}(x^\alpha) , \\ &\text{b)} \quad \psi_A(x^\alpha) \to \psi'_A(x^\alpha) = \psi_A(x^\alpha) + \delta^* \psi_A(x^\alpha) . \end{aligned} \tag{II-13}$$

On a, d'après le théorème de Taylor,

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad g'_{\mu\nu}(x'^\alpha) = g'_{\mu\nu}(x^\alpha + \delta x^\alpha) = g'_{\mu\nu}(x^\alpha) + \partial_\alpha g_{\mu\nu}\, \delta x^\alpha , \\ &\text{b)} \quad \psi'_A(x'^\alpha) = \psi'_A(x^\alpha + \delta x^\alpha) = \psi'_A(x^\alpha) + \partial_\alpha \psi_A\, \delta x^\alpha . \end{aligned} \tag{II-14}$$

Comparant (II-11) à (II-14), on obtient symboliquement

$$\delta = \delta^* + \delta x^\rho\, \partial_\rho . \tag{II-15}$$

La variation de (II-9) s'écrit

$$\delta I = \sum \delta \int_C f(x^\alpha, u^\beta)\, ds + \frac{1}{c}\delta \int_D \mathcal{L}\, d^4x . \tag{II-16}$$

Puisque $f(x^\alpha, u^\beta)$ est une fonction de $g_{\mu\nu}$, ψ_A, u^μ, le premier terme du second membre de (II-16) s'écrit

$$\sum \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_A}\, \delta\psi_A + \frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}}\, \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial f}{\partial u^\mu}\, \delta u^\mu \right) ds . \tag{II-17}$$

Intégrant par parties le terme en δu^μ, (II-17) devient

$$\sum \int_C \left[\frac{\partial f}{\partial \psi_A}\, \delta\psi_A + \frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}}\, \delta g_{\mu\nu} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial u^\mu} \right) \delta x^\mu \right] ds + \sum \int_C \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial u^\mu}\, \delta x^\mu \right) ds . \tag{II-18}$$

(II-18) s'écrit encore, d'après (II-15),

$$\sum \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial \psi_A}\, \delta^*\psi_A + \frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}}\, \delta^* g_{\mu\nu} + \frac{\delta f}{\delta x^\mu}\, \delta x^\mu \right) ds + \sum \int_C \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial u^\mu}\, \delta x^\mu \right) ds , \tag{II-19}$$

avec

$$\frac{\delta f}{\delta x^\mu} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial u^\mu} \right) .$$

Le deuxième terme du second membre de (II-16) s'écrit

$$\frac{1}{c}\int_D \delta\mathcal{L}\, d^4x + \frac{1}{c}\int_D \mathcal{L}\, \delta d^4x$$

ou, d'après (II-15),

$$\frac{1}{c}\int_D (\delta^*\mathcal{L} + \delta x^\rho\, \partial_\rho \mathcal{L})\, d^4x + \frac{1}{c}\int_D \mathcal{L}\, \delta d^4x . \tag{II-20}$$

On a $\delta \mathrm{d}^4x = \text{dét}\,|\delta^\mu_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu|\,\mathrm{d}^4x - \mathrm{d}^4x = \partial_\rho \delta x^\rho\,\mathrm{d}^4x$. (II-20) s'écrit alors

$$\frac{1}{c}\int_D \delta^*\mathcal{L}\,\mathrm{d}^4x + \frac{1}{c}\int_D \partial_\rho(\delta x^\rho\,\mathcal{L})\,\mathrm{d}^4x$$

ou

$$\frac{1}{c}\int_D \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_A}\delta^*\psi_A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\psi_A)}\delta^*\partial_\rho\psi_A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma\psi_A)}\delta^*\partial_\rho\partial_\sigma\psi_A + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\delta^* g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})}\delta^*\partial_\rho g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu})}\delta^*\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\rho(\delta x^\rho\,\mathcal{L})\right]\mathrm{d}^4x$$

ou, en intégrant par parties les termes contenant des dérivées ∂_ρ, $\partial_\rho\partial_\sigma$,

$$\text{(II-21)}\quad \frac{1}{c}\int_D \left(L^A\,\delta^*\psi_A + \frac{1}{2}\,T^{\mu\nu}\,\delta^* g_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x +$$
$$+ \frac{1}{c}\int_D \partial_\rho\left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\psi_A)} - \partial_\sigma\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma\psi_A)}\right]\delta^*\psi_A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma\psi_A)}\,\delta^*\partial_\sigma\psi_A + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} - \partial_\sigma\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu})}\right]\delta^* g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu})}\,\delta^*\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \delta x^\rho\,\mathcal{L}\right\}\mathrm{d}^4x\,,$$

où l'on a posé

$$\text{(II-22)}\quad L^A = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi_A} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_A} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\psi_A)} + \partial_\rho\partial_\sigma\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma\psi_A)}\right],$$

$$\text{(II-23)}\quad T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} + \partial_\rho\partial_\sigma\frac{\partial\mathcal{L}}{(\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu})}\right].$$

$T^{\mu\nu}$ sera appelé tenseur impulsion-énergie métrique [31, 32].

Portant (II-19) et (II-21) dans (II-16), on obtient

$$\text{(II-24)}\quad \delta I = \sum\int_C \left[\frac{\partial f}{\partial\psi_A}\,\delta^*\psi_A + \frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}}\,\delta^* g_{\mu\nu} + \frac{\delta f}{\delta x^\mu}\,\delta x^\mu + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial f}{\partial u^\mu}\,\delta x^\mu\right)\right]\mathrm{d}s +$$
$$+ \frac{1}{c}\int_D \left\{\left(L^A\,\delta^*\psi_A + \frac{1}{2}\,T^{\mu\nu}\,\delta^* g_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g} + \partial_\rho\left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\psi_A)} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \partial_\sigma\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma\psi_A)}\right)\delta^*\psi_A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma\psi_A)}\,\delta^*\partial_\sigma\psi_A + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} - \partial_\sigma\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu})}\right)\delta^* g_{\mu\nu} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu})}\,\delta^*\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \delta x^\rho\,\mathcal{L}\right]\right\}\mathrm{d}^4x\,.$$

2. **Les lois de conservation de la gravitation.** — En gravitation, on a

$$\text{(II-25)}\quad \begin{cases} \text{a)} & \psi_A = \psi_{\mu\nu}\,, \\ \text{b)} & f = -\,m\,c\,\sqrt{\hat{g}_{\mu\nu}\,u^\mu\,u^\nu} \qquad (\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2\,\psi_{\mu\nu})\,, \\ \text{c)} & \mathcal{L} = -\,\dfrac{1}{2\chi}\sqrt{-g}\,h\,\hat{R} = -\,\dfrac{1}{2\chi}\sqrt{-\hat{g}}\,\hat{R}\,, \\ \text{d)} & \partial f/\partial\psi_{\mu\nu} = -\,m\,c\,u^\mu\,u^\nu/\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}\,, \\ \text{e)} & \partial f/\partial g_{\mu\nu} = -\,m\,c\,u^\mu\,u^\nu/2\,\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}\,, \\ \text{f)} & \partial f/\partial u^\mu = -\,m\,c\,(u_\mu + 2\,\psi_{\mu\nu}\,u^\nu)/\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}\,, \end{cases}$$

$$\text{(II-25)}\quad \left|\begin{array}{ll} \text{g)} & \dfrac{\delta f}{\delta x^\mu} = \dfrac{\widehat{g}_{\mu\nu}}{c\sqrt{1+2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}}\left(m\,c^2\,\dfrac{\nabla u^\nu}{ds} - F^\nu\right), \\ & F^\nu = m\,c^2\left(-\Delta^\nu_{\rho\sigma}\,u^\rho\,u^\sigma + u^\nu\,u^\rho\,\partial_\rho \mathrm{Log}\sqrt{1+2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}\right), \\ \text{h)} & L^{\mathrm{A}} \equiv L^{\mu\nu} = \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\,\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi_{\mu\nu}} = h\,S^{\mu\nu}, \\ \text{i)} & T^{\mu\nu} \equiv \dfrac{2}{\sqrt{-g}}\,\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = L^{\mu\nu}. \end{array}\right.$$

L'équation (II-24) s'écrit alors

$$\delta I = \sum \int_{\mathrm{C}} \left[-m\,c\,\frac{u^\mu\,u^\nu\,\delta^*\psi_{\mu\nu}}{\sqrt{1+2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}} - m\,c\,\frac{u^\mu\,u^\nu\,\delta^* g_{\mu\nu}}{2\sqrt{1+2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{c}\,\frac{\widehat{g}_{\mu\nu}}{\sqrt{1+2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}}\left(m\,c^2\,\frac{\nabla u^\nu}{ds} - F^\nu\right)\delta x^\mu - m\,c\,\frac{\mathrm{d}}{ds}\,\frac{(u_\mu + 2\,\psi_{\mu\nu}\,u^\nu)\,\delta x^\mu}{\sqrt{1+2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}}\right] ds +$$
$$+ \frac{1}{c}\int_{\mathrm{D}} \left(L^{\mu\nu}\,\delta^*\psi_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,T^{\mu\nu}\,\delta^* g_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x +$$
$$+ \frac{1}{c}\int_{\mathrm{D}} \partial_\rho \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\psi_{\mu\nu})} - \partial_\sigma\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma\psi_{\mu\nu})}\right]\delta^*\psi_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma\psi_{\mu\nu})}\,\delta^*\partial_\sigma\psi_{\mu\nu} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} - \partial_\sigma\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu})}\right]\delta^* g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu})}\,\delta^*\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \delta x^\rho\,\mathcal{L}\right\}\mathrm{d}^4x = 0.$$

Posons, comme au paragraphe I.5,

$$\mu = \sum_{\mathrm{N}} m_{\mathrm{N}}\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_{\mathrm{N}}) = \mu_0\sqrt{-g}\,\frac{\mathrm{d}x^0}{ds};$$

nous obtenons alors

$$\text{(II-26)}\quad \delta I = \int_{\mathrm{D}} \left[\frac{1}{c}\,(L^{\mu\nu} - M^{\mu\nu})\,\delta^*\psi_{\mu\nu} + \frac{1}{2\,c}\,(T^{\mu\nu} - M^{\mu\nu})\,\delta^* g_{\mu\nu} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{c}\,\frac{\widehat{g}_{\mu\nu}}{\sqrt{1+2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}}\left(\mu_0\,c^2\,\frac{\nabla u^\nu}{ds} - f^\nu\right)\delta x^\mu - \mu_0\,c\,\frac{\mathrm{d}}{ds}\,(U_\mu\,\delta x^\mu)\right]\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x +$$
$$+ \frac{1}{c}\int_{\mathrm{D}} \partial_\rho \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\psi_{\mu\nu})} - \partial_\sigma\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma\psi_{\mu\nu})}\right]\delta^*\psi_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma\psi_{\mu\nu})}\,\delta^*\partial_\sigma\psi_{\mu\nu} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} - \partial_\sigma\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu})}\right]\delta^* g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu})}\,\delta^*\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \delta x^\rho\,\mathcal{L}\right\}\mathrm{d}^4x = 0,$$

où l'on a posé

$$\text{(II-27)}\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{a)} & M^{\mu\nu} = \mu_0\,c^2\,u^\mu\,u^\nu/\sqrt{1+2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}, \\ \text{b)} & f^\nu = \mu_0\,c^2\left(-\Delta^\nu_{\rho\sigma}\,u^\rho\,u^\sigma + u^\nu\,u^\rho\,\partial_\rho \mathrm{Log}\sqrt{1+2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}\right), \\ \text{c)} & U_\mu = (u_\mu + 2\,\psi_{\mu\nu}\,u^\nu)/\sqrt{1+2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}. \end{array}\right.$$

A) Si la transformation infinitésimale (II-10) est une isométrie de l'espace-temps, définie par (II-5) et (II-6), on a

$$\text{(II-28)}\quad \begin{cases} \text{a)} & \delta x^\mu = \xi^\mu , \\ \text{b)} & \delta^* \psi_{\mu\nu} = -(\xi^\rho \partial_\rho \psi_{\mu\nu} + \psi_{\mu\rho}\partial_\nu \xi^\rho + \psi_{\rho\nu}\partial_\mu \xi^\rho) \\ & \qquad = -(\xi^\rho \nabla_\rho \psi_{\mu\nu} + \psi_{\mu\rho}\nabla_\nu \xi^\rho + \psi_{\rho\nu}\nabla_\mu \xi^\rho) , \\ \text{c)} & \delta^* g_{\mu\nu} = -(\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) = 0 . \end{cases}$$

En tenant compte de (II-28c) et des équations du champ et du mouvement,

$$\text{(II-29)}\qquad L^{\mu\nu} - M^{\mu\nu} = 0 , \qquad \mu_0 c^2 \frac{\nabla u^\nu}{ds} - f^\nu = 0 ,$$

(II-26) s'écrit

$$\delta I = \int_D -\mu_0 c \frac{d}{ds}(U_\mu \xi^\mu)\sqrt{-g}\, d^4x + \frac{1}{c}\int_D \partial_\rho \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \psi_{\mu\nu})} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma \psi_{\mu\nu})} \right] \delta^* \psi_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho \psi_{\mu\nu})} \delta^* \partial_\sigma \psi_{\mu\nu} + \xi^\rho \mathcal{L} \right\} d^4x = 0$$

ou, sous forme covariante,

$$\text{(II-30)}\quad \delta I = \int_D -\mu_0 c \frac{\nabla}{ds}(U_\mu \xi^\mu)\sqrt{-g}\, d^4x + \frac{1}{c}\int_D \nabla_\rho \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \psi_{\mu\nu})} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \nabla_\sigma \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\sigma \psi_{\mu\nu})} \right] \delta^* \psi_{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\sigma \psi_{\mu\nu})} \delta^* \nabla_\sigma \psi_{\mu\nu} + \xi^\rho L \right\} \sqrt{-g}\, d^4x = 0 .$$

Portant (II-28b) dans (II-30) et explicitant le calcul, nous obtenons

$$\text{(II-31)}\quad \delta I = \int_D \left[\left(-\mu_0 c \frac{\nabla U_\mu}{ds} + \frac{1}{c}\nabla_\rho \theta^\rho_\mu \right)\xi^\mu + \left(-\mu_0 c\, U^\mu u^\nu - \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{c} B^{\mu\nu} \right) \nabla_\nu \xi_\mu + \frac{1}{c}\left(B^{\mu\nu\sigma}\nabla_\sigma \nabla_\nu \xi_\mu + B^{\mu\nu\sigma\tau}\nabla_\tau \nabla_\sigma \nabla_\nu \xi_\mu \right) \right] \sqrt{-g}\, d^4x = 0 ,$$

où nous avons posé

$$\text{(II-32)}\quad \begin{cases} \text{a)} & \theta^\rho_\mu = -\left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \psi_{\alpha\beta})} - \nabla_\sigma \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\sigma \psi_{\alpha\beta})} \right] \nabla_\mu \psi_{\alpha\beta} - \\ & \qquad - \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\sigma \psi_{\alpha\beta})} \nabla_\mu \nabla_\sigma \psi_{\alpha\beta} - \delta^\rho_\mu L , \\ \text{b)} & B^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \nabla_\sigma C^{\mu\nu\sigma} , \\ \text{c)} & C^{\mu\nu\sigma} = -2\left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\sigma \psi_{\alpha\nu})} - \nabla_\lambda \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\sigma \nabla_\lambda \psi_{\alpha\nu})} \right] \psi^\mu_\alpha - \\ & \qquad - 2\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\sigma \nabla_\lambda \psi_{\alpha\nu})} \nabla_\lambda \psi^\mu_\alpha - \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\sigma \nabla_\nu \psi_{\alpha\beta})} \nabla^\mu \psi_{\alpha\beta} , \\ \text{d)} & B^{\mu\nu\sigma} = C^{\mu\nu\sigma} + \nabla_\tau B^{\mu\nu\sigma\tau} , \\ \text{e)} & B^{\mu\nu\sigma\tau} = -2\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\tau \nabla_\sigma \psi_{\alpha\nu})} \psi^\mu_\alpha . \end{cases}$$

(les indices sont abaissés ou élevés au moyen des $g_{\mu\nu}$ ou $g^{\mu\nu}$).

En tenant compte de (II-28c), (II-31) s'écrit encore

$$\text{(II-33)}\quad \delta I = \int_D \left\{ \left(-\mu_0 c \frac{\nabla U_\mu}{ds} + \frac{1}{c}\nabla_\rho \theta^\rho_\mu \right)\xi^\mu + \frac{1}{2}\left[\mu_0 c\,(U^\mu u^\nu - U^\nu u^\mu) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{c}(\Sigma^{\mu\nu} - \Sigma^{\nu\mu}) \right] \nabla_\mu \xi_\nu + \frac{1}{c}\left(B^{\mu\nu\sigma}\nabla_\sigma \nabla_\nu \xi_\mu + B^{\mu\nu\sigma\tau}\nabla_\tau \nabla_\sigma \nabla_\nu \xi_\mu \right) \right\} \sqrt{-g}\, d^4x = 0 .$$

où l'on a posé

$$\Sigma^{\mu\nu} = B^{\mu\nu} - \nabla_\sigma \left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\sigma \psi_{\mu\nu})} - \nabla_\lambda \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\sigma \nabla_\lambda \psi_{\mu\nu})} \right] ; \tag{II-34}$$

$B^{\mu\nu\sigma}_{\circlearrowright}$ et $B^{\mu\nu\sigma\tau}_{\circlearrowright}$ sont les parties antisymétriques de $B^{\mu\nu\sigma}$ et $B^{\mu\nu\sigma\tau}$ respectivement.

On a

$$B^{\mu\nu\sigma}_{\circlearrowright} \nabla_\sigma \nabla_\nu \xi_\mu = - B^{\mu\nu\sigma}_{\circlearrowright} \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\sigma \equiv 0 , \tag{II-35}$$

$$B^{\mu\nu\sigma\tau}_{\circlearrowright} \nabla_\tau \nabla_\sigma \nabla_\nu \xi_\mu = - B^{\mu\nu\sigma\tau}_{\circlearrowright} \nabla_\tau \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\sigma \equiv 0 , \tag{II-36}$$

à cause de (II-28c) et de la commutativité des ∇_μ, ∇_ν.

D'après (II-32b) et (II-34), on a

$$\Sigma^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \nabla_\sigma l^{\mu\nu\sigma} , \tag{II-37}$$

avec

$$l_\alpha^{\rho\sigma} = - \left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\sigma \psi_{\beta\rho})} - \nabla_\lambda \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\sigma \nabla_\lambda \psi_{\beta\rho})} \right] \hat{g}_{\alpha\beta} - \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\sigma \nabla_\lambda \psi_{\beta\rho})} \nabla_\lambda \hat{g}_{\alpha\beta} - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\sigma \nabla_\rho \psi_{\beta\gamma})} \nabla_\alpha \hat{g}_{\beta\gamma} ; \tag{II-38}$$

$l_\alpha^{\rho\sigma}$ n'est pas antisymétrique en ρ et σ, mais le calcul de l'appendice montre que $l_\alpha^{\rho\sigma}$ peut se mettre sous la forme

$$l_\alpha^{\rho\sigma} = U_\alpha^{\rho\sigma} + \nabla_\lambda a_\alpha^{\rho\sigma\lambda} , \tag{II-39}$$

avec

$$U_\alpha^{\rho\sigma} = \frac{h}{\chi} \hat{g}^{\rho\mu} \hat{g}^{\sigma\nu} (\nabla_\mu \psi_{\alpha\nu} - \nabla_\nu \psi_{\alpha\mu}) , \tag{II-40}$$

$$a_\alpha^{\rho\sigma\lambda} = \frac{h}{2\chi} (\delta_\alpha^\sigma \hat{g}^{\rho\lambda} - \delta_\alpha^\lambda \hat{g}^{\rho\sigma}) . \tag{II-41}$$

Portant (II-39) dans (II-37) nous obtenons

$$\Sigma^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \Theta^{\mu\nu} , \tag{II-42}$$

avec

$$\Theta^{\mu\nu} = \nabla_\sigma U^{\mu\nu\sigma} . \tag{II-43}$$

(II-33) s'écrit, d'après (II-35) et (II-36),

$$\delta I = \int_D \left\{ \left(- \mu_0 c \frac{\nabla U_\mu}{ds} + \frac{1}{c} \nabla_\rho \theta_\mu^\rho \right) \xi^\mu + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\mu_0 c (U^\mu u^\nu - U^\nu u^\mu) - \frac{1}{c} (\Sigma^{\mu\nu} - \Sigma^{\nu\mu}) \right] \nabla_\mu \xi_\nu \right\} \sqrt{-g}\, d^4x = 0 . \tag{II-44}$$

On en déduit les dix lois de conservation :

$$\mu_0 c^2 \frac{\nabla U_\mu}{ds} = \nabla_\rho \theta_\mu^\rho , \tag{II-45}$$

$$\mu_0 c^2 (U^\mu u^\nu - U^\nu u^\mu) = \Sigma^{\mu\nu} - \Sigma^{\nu\mu} . \tag{II-46}$$

Le tenseur $\theta^{\mu\nu}$ sera appelé tenseur impulsion-énergie canonique ou orbital, le tenseur $\Theta^{\mu\nu}$ sera appelé tenseur impulsion-énergie spinoriel et le tenseur $\Sigma^{\mu\nu}$ sera appelé tenseur impulsion-énergie total (= orbital + spinoriel).

Remarques. — a) D'après (II-43), on a

$$\nabla_\nu \Theta^{\mu\nu} = 0 . \tag{II-47}$$

D'où $\nabla_\rho \theta_\mu^\rho = \nabla_\rho \Sigma_\mu^\rho$. Par conséquent, dans les lois de conservation (II-45) on pourrait aussi remplacer θ_μ^ρ par Σ_μ^ρ.

b) Lorsque l'espace-temps est rapporté à un système cartésien, les équations (II-45) et (II-46) s'écrivent

$$\text{(II-48)}\quad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \mu_0 c^2\, \mathrm{d}U_\mu/\mathrm{d}s = \partial_\rho \theta_\mu^\rho\,, \\ &\text{b)}\quad \mu_0 c^2 (U^\mu u^\nu - U^\nu u^\mu) = \Sigma^{\mu\nu} - \Sigma^{\nu\mu} \qquad (\Sigma^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \Theta^{\mu\nu})\,. \end{aligned}$$

(II-48b) s'écrit encore

$$\mu_0 c^2 (U^\mu u^\nu - U^\nu u^\mu) = \theta^{\mu\nu} - \theta^{\nu\mu} + \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu}$$

ou, d'après (II-48a),

$$\mu_0 c^2 \left(U^\mu \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} - U^\nu \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\right) + \left(\mu_0 c^2 \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}s} - \partial_\rho \theta^{\mu\rho}\right) x^\nu - \left(\mu_0 c^2 \frac{\mathrm{d}U^\nu}{\mathrm{d}s} - \partial_\rho \theta^{\nu\rho}\right) x^\mu = \\ = \theta^{\mu\nu} - \theta^{\nu\mu} + \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu}$$

ou

$$\text{(II-49)}\qquad \mu_0 c^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(U^\mu x^\nu - U^\nu x^\mu) + \partial_\sigma \boldsymbol{m}^{\mu\nu\sigma} = \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu}\,,$$

avec $\boldsymbol{m}^{\mu\nu\sigma} = x^\mu\, \theta^{\nu\sigma} - x^\nu\, \theta^{\mu\sigma}$. Mais, d'après (II-47), il est immédiat que le second membre de (II-49) peut se mettre sous la forme $-\partial_\sigma \boldsymbol{s}^{\mu\nu\sigma}$ avec $\boldsymbol{s}^{\mu\nu\sigma} = x^\mu\, \Theta^{\nu\sigma} - x^\nu\, \Theta^{\mu\sigma}$. (II-49) s'écrit alors

$$\text{(II-50)}\qquad \mu_0 c^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(x^\mu U^\nu - x^\nu U^\mu) = \partial_\sigma \boldsymbol{j}^{\mu\nu\sigma}\,,$$

avec $\boldsymbol{j}^{\mu\nu\sigma} = \boldsymbol{m}^{\mu\nu\sigma} + \boldsymbol{s}^{\mu\nu\sigma} = x^\mu\, \Sigma^{\nu\sigma} - x^\nu\, \Sigma^{\mu\sigma}$.

Les tenseurs $\boldsymbol{m}^{\mu\nu\sigma}$, $\boldsymbol{s}^{\mu\nu\sigma}$ et $\boldsymbol{j}^{\mu\nu\sigma}$ seront appelés respectivement le moment orbital, le moment spinoriel et le moment total du champ gravitationnel [1*a*].

c) Le lagrangien (I-54) peut aussi se mettre sous la forme suivante, d'après (I-16),

$$L = -\frac{h}{2\chi} \hat{g}^{\mu\nu} (R_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}) = -\frac{h}{2\chi} \hat{g}^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = H + L_1\,,$$

avec

$$\text{(II-51)}\quad \begin{aligned} &\text{a)}\qquad H = \frac{1}{2\chi} \nabla_\rho \left[\frac{1}{h} \nabla_\mu (h^2 \hat{g}^{\rho\mu})\right], \\ &\text{b)}\qquad L_1 = \frac{h}{2\chi} \hat{g}^{\mu\nu} (\Delta^\rho_{\mu\nu} \Delta^\sigma_{\rho\sigma} - \Delta^\rho_{\mu\sigma} \Delta^\sigma_{\nu\rho})\,. \end{aligned}$$

H est une divergence ; par conséquent, sa contribution dans les équations du champ et les lois de conservation est nulle. Nous pouvons donc remplacer L par L_1 qui possède l'avantage de ne dépendre que des $\psi_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées covariantes premières seulement. Les formules (II-32a) et (II-37) se simplifieront de la façon suivante :

$$\text{(II-52)}\quad \begin{aligned} &\text{a)}\qquad \theta_{1\mu}{}^\rho = -\frac{\partial L_1}{\partial(\nabla_\rho \psi_{\alpha\beta})} \nabla_\mu \psi_{\alpha\beta} + \delta^\rho_\mu\, L_1\,, \\ &\text{b)}\qquad \Sigma_1^{\mu\nu} = \theta_1^{\mu\nu} + \nabla_\sigma l_1^{\mu\nu\sigma}\,, \end{aligned}$$

avec

$$l_{1\alpha}{}^{\rho\sigma} = -\frac{\partial L_1}{\partial(\nabla_\sigma \psi_{\beta\rho})} \hat{g}_{\alpha\beta}\,.$$

Le calcul de l'appendice montre que $l_{1\alpha}{}^{\rho\sigma}$ peut se mettre sous la forme $l_{1\alpha}{}^{\rho\sigma} = U_{1\alpha}{}^{\rho\sigma} + \nabla_\lambda a_\alpha{}^{\rho\sigma\lambda}$, avec

(II-53) $$U_{1\alpha}{}^{\rho\sigma} = \frac{\widehat{g}_{\alpha\mu}}{2\chi h}\nabla_\nu\left[h^2\left(\widehat{g}^{\rho\mu}\widehat{g}^{\sigma\nu} - \widehat{g}^{\sigma\mu}\widehat{g}^{\rho\nu}\right)\right]$$

et $a_\alpha{}^{\rho\sigma\lambda}$ est donné par (II-41).

Cependant, dans ce travail, *nous n'utiliserons pas le lagrangien* L_1, car il ne satisfait pas à la condition (I-29b), donc au principe d'équivalence.

B) Si la transformation infinitésimale (II-10) est une transformation infinitésimale des coordonnées curvilignes de l'espace-temps, définie par (II-7), (II-26) s'écrit

(II-54) $$\delta I = \frac{1}{c}\int_D \left[(L^{\mu\nu} - M^{\mu\nu})\,\delta^*\psi_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - M^{\mu\nu})\,\delta^* g_{\mu\nu} + \right.$$
$$\left. + \frac{\widehat{g}_{\mu\nu}}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}}\left(\mu_0\,c^2\frac{\nabla u^\nu}{ds} - f^\nu\right)\alpha^\mu\right]\sqrt{-g}\,d^4x = 0\,,$$

car les intégrales portant sur une divergence se transforment en intégrales étendues au bord de D et s'annulent, d'après l'hypothèse faite sur les $\alpha^\mu(x^\alpha)$.

Portant $\delta^* g_{\mu\nu} = -(\nabla_\mu\alpha_\nu + \nabla_\nu\alpha_\mu)$, $\alpha_\mu = g_{\mu\nu}\,\alpha^\nu$ dans (II-54) et intégrant par parties, nous obtenons

(II-55) $$\delta I = \frac{1}{c}\int_D \left[(L^{\mu\nu} - M^{\mu\nu})\,\delta^*\psi_{\mu\nu} + \nabla_\nu(T^{\mu\nu} - M^{\mu\nu})\,\alpha_\mu + \right.$$
$$\left. + \frac{\widehat{g}_{\mu\nu}}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}}\left(\mu_0\,c^2\frac{\nabla u^\nu}{ds} - f^\nu\right)\alpha^\mu\right]\sqrt{-g}\,d^4x = 0\,.$$

L'intégrale d'action I étant invariante par rapport au changement de coordonnées de l'espace-temps, l'équation (II-55) montre que, si le champ obéit aux équations du champ $L^{\mu\nu} - M^{\mu\nu} = 0$, les équations

(II-56) $$\nabla_\nu(T^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}) = 0$$

entraînent alors les équations du mouvement :

(II-57) $$\mu_0\,c^2\frac{\nabla u^\nu}{ds} - f^\nu = 0\,.$$

Inversement, les équations (II-57) impliquent les équations (II-56). On peut d'ailleurs vérifier que les équations (II-56) entraînent les équations du mouvement.

En effet, d'après (II-27a),

$$\nabla_\nu M^{\mu\nu} = \frac{u^\mu\,\nabla_\nu(\mu_0\,c^2\,u^\nu)}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}} + \mu_0\,c^2\,u^\nu\,\nabla_\nu\frac{u^\mu}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}}$$

ou, d'après l'équation de continuité,

(II-58) $$\nabla_\nu M^{\mu\nu} = \mu_0\,c^2\,u^\nu\,\nabla_\nu\frac{u^\mu}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}}\,.$$

D'autre part, d'après (II-25i) et (I-52), on a

(II-59) $$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = -\Delta^\mu_{\rho\sigma}\,L^{\rho\sigma}\,.$$

Par hypothèse, les équations du champ $L^{\mu\nu} = M^{\mu\nu}$ sont satisfaites ; par conséquent, (II-59) s'écrit

(II-60) $$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = -\Delta^\mu_{\rho\sigma}\,M^{\rho\sigma} = -\Delta^\mu_{\rho\sigma}\frac{\mu_0\,c^2\,u^\rho\,u^\sigma}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}}\,.$$

Portant (II-58) et (II-60) dans (II-56), on obtient alors les équations du mouvement (II-57).

Les équations (II-56) sont les équations de Trautman de la gravitation.

3. **Expression du tenseur impulsion-énergie canonique. Quadrivecteur impulsion-énergie.** — *1. Le tenseur impulsion-énergie canonique.* — L'expression du tenseur impulsion-énergie canonique (II-32a) peut aussi s'écrire

$$\theta_\mu^\rho = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\psi_{\alpha\beta})} - \nabla_\sigma \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\nabla_\sigma\psi_{\alpha\beta})}\right]\nabla_\mu \hat{g}_{\alpha\beta} - \\ - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\nabla_\sigma\psi_{\alpha\beta})}\nabla_\mu\nabla_\sigma \hat{g}_{\alpha\beta} + \delta_\mu^\rho L . \tag{II-61}$$

D'autre part, on a

$$\hat{g}_{\mu\sigma} L^{\rho\sigma} = \hat{g}_{\mu\sigma}\left[\frac{\partial L}{\partial \psi_{\rho\sigma}} - \nabla_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha\psi_{\rho\sigma})} + \nabla_\alpha\nabla_\beta \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi_{\rho\sigma})}\right]. \tag{II-62}$$

En formant la différence (II-61) — (II-62), on obtient

$$\theta_\mu^\rho - \hat{g}_{\mu\sigma} L^{\rho\sigma} = \hat{g}_{\mu\sigma}\nabla_\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha\psi_{\rho\sigma})} - \nabla_\beta \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi_{\rho\sigma})}\right] + \\ + \frac{1}{2}\nabla_\sigma \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\nabla_\sigma\psi_{\alpha\beta})}\nabla_\mu \hat{g}_{\alpha\beta} - g_{\mu\sigma}\frac{\partial L}{\partial \psi_{\rho\sigma}} - \\ - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\psi_{\alpha\beta})}\nabla_\mu \hat{g}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\nabla_\sigma\psi_{\alpha\beta})}\nabla_\mu\nabla_\sigma \hat{g}_{\alpha\beta} + \delta_\mu^\rho L . \tag{II-63}$$

Le premier terme et le deuxième terme du second membre de (II-63) s'écrivent respectivement :

$$\nabla_\alpha\left\{\hat{g}_{\mu\sigma}\left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha\psi_{\rho\sigma})} - \nabla_\beta \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi_{\rho\sigma})}\right]\right\} - \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha\psi_{\rho\sigma})}\nabla_\alpha \hat{g}_{\mu\sigma} - \\ + \nabla_\beta\left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi_{\rho\sigma})}\nabla_\alpha \hat{g}_{\mu\sigma}\right] - \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi_{\rho\sigma})}\nabla_\alpha\nabla_\beta \hat{g}_{\mu\sigma} \tag{II-64}$$

et

$$\frac{1}{2}\nabla_\sigma\left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\nabla_\sigma\psi_{\alpha\beta})}\nabla_\mu \hat{g}_{\alpha\beta}\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\nabla_\sigma\psi_{\alpha\beta})}\nabla_\mu\nabla_\sigma \hat{g}_{\alpha\beta} . \tag{II-65}$$

Portant (II-64) et (II-65) dans (II-63), on obtient alors

$$\theta_\mu^\rho - \hat{g}_{\mu\sigma} L^{\rho\sigma} = -\nabla_\sigma l_\mu^{\rho\sigma} + d_\mu^\rho , \tag{II-66}$$

où $l_\mu^{\rho\sigma}$ est donné par (II-38) et

$$d_\mu^\rho = -\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha\psi_{\rho\sigma})}\nabla_\alpha \hat{g}_{\mu\sigma} - \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi_{\rho\sigma})}\nabla_\alpha\nabla_\beta \hat{g}_{\mu\sigma} - \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\nabla_\sigma\psi_{\alpha\beta})}\nabla_\mu\nabla_\sigma \hat{g}_{\alpha\beta} - \\ - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\psi_{\alpha\beta})}\nabla_\mu \hat{g}_{\alpha\beta} - \hat{g}_{\mu\sigma}\frac{\partial L}{\partial \psi_{\rho\sigma}} - \delta_\mu^\rho L . \tag{II-67}$$

Le calcul de l'appendice montre que $d_\mu^\rho \equiv 0$. (II-66) s'écrit donc, d'après (II-39),

$$\theta_\mu^\rho = \hat{g}_{\mu\sigma} L^{\rho\sigma} - \nabla_\sigma U_\mu^{\rho\sigma} . \tag{II-68}$$

Puisque $U_\mu^{\rho\sigma}$ est antisymétrique en ρ et σ, les équations (II-68) montrent que, dans le cas d'un champ gravitationnel pur ($L^{\rho\sigma} = 0$), on a $\nabla_\rho\theta_\mu^\rho = 0$. Dans le cas où il existe aussi une répartition de masses, montrons que les équations (II-68) sont compatibles avec les lois de conservation (II-45).

D'après les équations du champ $L^{\mu\nu} = M^{\mu\nu}$, (II-68) donne

$$\nabla_\rho \theta_\mu^\rho = \nabla_\rho(\acute{g}_{\mu\sigma} L^{\rho\sigma}) = \nabla_\rho(\acute{g}_{\mu\sigma} M^{\rho\sigma}) = \nabla_\rho \frac{\acute{g}_{\mu\sigma}\, \mu_0\, c^2\, u^\rho\, u^\sigma}{\sqrt{1 + 2\,\acute{\psi}_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta}}$$

ou, en tenant compte de l'équation de continuité,

$$\nabla_\rho \theta_\mu^\rho = \mu_0\, c^2\, u^\rho\, \nabla_\rho \frac{u_\mu + 2\,\acute{\psi}_{\mu\nu}\, u^\nu}{\sqrt{1 + 2\,\acute{\psi}_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta}} = \mu_0\, c^2 \frac{\nabla U_\mu}{\mathrm{d}s}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

2. *Le quadrivecteur impulsion-énergie.* Nous adopterons ici un système de coordonnées *cartésiennes*. Les équations de conservation (II-45) s'écrivent alors, dans le cas extérieur,

$$\text{(II-69)} \qquad \partial_\rho \Sigma_\mu^\rho = \partial_\rho \theta_\mu^\rho = 0\,.$$

Intégrant (II-69) dans un volume quadridimensionnel D, nous obtenons

$$\int_D \partial_\rho \Sigma_\mu^\rho\, \mathrm{d}^4x = \int_D \partial_\rho \theta_\mu^\rho\, \mathrm{d}^4x = 0 \qquad (\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}x^1\, \mathrm{d}x^2\, \mathrm{d}x^3\, \mathrm{d}x^0)$$

ou, d'après le théorème de Gauss,

$$\text{(II-70)} \qquad \int_{\sigma_1} \theta_\mu^\rho\, \mathrm{d}\sigma_\rho - \int_{\sigma_2} \theta_\mu^\rho\, \mathrm{d}\sigma_\rho = 0\,;$$

σ_1 et σ_2 sont des hypersurfaces à trois dimensions, du genre espace. $\mathrm{d}\sigma_\rho$ est la projection de l'élément $\mathrm{d}\sigma$ sur l'hyperplan perpendiculaire à l'axe x^ρ.

(II-70) prouve que le quadrivecteur

$$P_\mu = -\frac{1}{c} \int_\sigma \theta_\mu^\rho\, \mathrm{d}\sigma_\rho$$

est indépendant de l'hypersurface σ.

En particulier, si l'intégration est faite sur l'hyperplan $x^0 = \mathrm{Cte}$, on a $\mathrm{d}\sigma_\rho = (0, 0, 0, \mathrm{d}V)$, $\mathrm{d}V$ étant le volume élémentaire de l'espace à trois dimensions et le quadrivecteur

$$\text{(II-71)} \qquad P_\mu = -\frac{1}{c} \int_{t=\mathrm{Cte}} \theta_\mu^0\, \mathrm{d}V$$

est indépendant du temps. P_μ sera, à un facteur constant près, le quadrivecteur impulsion-énergie.

D'après (II-68), l'équation (II-71) peut encore s'écrire, dans le cas extérieur ($L^{\rho\sigma} = 0$),

$$\text{(II-72)} \qquad P_\mu = \frac{1}{c} \int_{t=\mathrm{Cte}} \partial_\sigma U_\mu^{0\sigma}\, \mathrm{d}V\,.$$

Nous nous proposons maintenant de calculer P_μ dans le cas du champ de Schwarzschild.

A) Dans la jauge de Schwarzschild, on a

$$\text{(II-73)} \quad \begin{cases} \text{a)} \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2\theta, \quad g_{00} = 1\,, \\ \text{b)} \quad \acute{g}_{11} = -\dfrac{1}{1 - (2\,GM/c^2 r)}, \quad \acute{g}_{22} = -r^2, \\ \qquad \acute{g}_{33} = -r^2 \sin^2\theta\,, \qquad \acute{g}_{00} = 1 - (2\,GM/c^2 r)\,, \\ \text{c)} \quad \acute{\psi}_{11} \simeq -GM/c^2 r, \quad \acute{\psi}_{00} = -GM/c^2 r\,, \\ \text{d)} \quad h = 1, \quad \mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi\,. \end{cases}$$

Portant (II-73) dans (II-40), nous obtenons

$$U_k^{0\sigma} = 0\,, \qquad U_0^{01} = -\frac{h}{\chi}\hat{g}^{11}\hat{g}^{00}\partial_1\psi_{00} = \frac{1}{\chi}\frac{GM}{c^2 r^2} = \frac{M c^2}{8\pi r^2}\,.$$

D'où, d'après (II-72),

$$P_k = 0\,, \quad P_0 = \frac{1}{c}\int_V \partial_1 U_0^{01}\,dV = \frac{1}{c}\int_S U_0^{01}\,dS \qquad (dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi)\,.$$

Intégrant cette dernière intégrale sur une sphère de rayon r, nous obtenons

$$\text{(II-74)} \qquad P_0 = \frac{1}{c}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{M c^2}{8\pi r^2} r^2 \sin\theta\, d\varphi = \frac{1}{2} M c\,.$$

B) Dans la jauge isotropique (ou de Rosen), on a

$$\text{(II-75)} \quad \begin{cases} \text{a)} & g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{00} = 1\,, \\ \text{b)} & \hat{g}_{11} = \hat{g}_{22} = \hat{g}_{33} \simeq -\left(1 + \dfrac{2GM}{c^2 r}\right), \quad \hat{g}_{00} \simeq 1 - \dfrac{2GM}{c^2 r}\,, \\ \text{c)} & \psi_{11} = \psi_{22} = \psi_{33} \simeq -GM/c^2 r \simeq \psi_{00}\,, \\ \text{d)} & h \simeq 1 + (2GM/c^2 r)\,, \quad dV = dx^1\, dx^2\, dx^3\,. \end{cases}$$

Portant (II-75) dans (II-40), nous obtenons

$$U_k^{0\sigma} = 0\,, \qquad U_0^{0k} \simeq \frac{1}{\chi}\partial_k\psi_{00} \simeq \frac{GM}{\chi c^2 r^2}\frac{x^k}{r} = \frac{M c^2}{8\pi r^2}\frac{x^k}{r}\,.$$

D'où

$$P_k = 0\,, \qquad P_0 = \frac{1}{c}\int_V \partial_k U_0^{0k}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = \frac{1}{c}\int_S U_0^{0k}\,\delta_{kij}\, dx^i\, dx^j\,,$$

δ_{kij} étant le symbole de Lévi-Civita. Intégrant cette dernière intégrale sur une sphère de rayon r, il vient

$$\text{(II-76)} \qquad P_0 = \frac{1}{c}\int_S \frac{M c^2}{8\pi r^2}\frac{x^k}{r}\,\delta_{kij}\, dx^i\, dx^j = \frac{1}{2} M c\,.$$

(II-74) et (II-76) montrent que $2P_\mu$ représente le quadrivecteur impulsion-énergie.

4. **Cas où il existe un champ électromagnétique. Théorie einstein-maxwellienne.** — Considérons un système champ gravitationnel+champ électromagnétique+particules chargées. L'intégrale d'action d'un tel système est de la forme

$$I = -\sum m c \int_C \sqrt{\hat{g}_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu} + \sum \frac{e}{c}\int_C A_\mu\, dx^\mu - \\ - \frac{1}{c}\int_D \left(\frac{\hat{\mathcal{R}}}{2\chi} + \frac{1}{4}\sqrt{-\hat{g}}\,\hat{g}^{\mu\rho}\,\hat{g}^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}\right) d^4x\,,$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\hat{\mathcal{R}} = \sqrt{-\hat{g}}\,\hat{R}$.

Cette intégrale est obtenue en appliquant le théorème II du paragraphe I.1.2. D'après la notation du paragraphe II.1, nous avons ici

$$\text{(II-77)} \quad \begin{cases} \text{a)} & \psi_A = A_\mu, \psi_{\mu\nu}\,, \\ \text{b)} & f = -m c \sqrt{\hat{g}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} + \dfrac{e}{c} A_\mu u^\mu\,, \\ \text{c)} & \mathcal{L} = -\dfrac{\hat{\mathcal{R}}}{2\chi} - \dfrac{1}{4}\sqrt{-\hat{g}}\,\hat{g}^{\mu\rho}\,\hat{g}^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}\,, \end{cases}$$

(II-77)

d) $$\frac{\partial f}{\partial A_\mu} = \frac{e}{c} u^\mu, \qquad \frac{\partial f}{\partial \psi_{\mu\nu}} = - m c \frac{u^\mu u^\nu}{\sqrt{1 + 2 \psi_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}},$$

e) $$\frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}} = - \frac{1}{2} m c \frac{u^\mu u^\nu}{\sqrt{1 + 2 \psi_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}},$$

f) $$\frac{\partial f}{\partial u^\mu} = - m c \frac{u_\mu + 2 \psi_{\mu\nu} u^\nu}{\sqrt{1 + 2 \psi_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}} + \frac{e}{c} A_\mu,$$

g) $$\frac{\delta f}{\delta x^\mu} = \frac{1}{c} \frac{\hat{g}_{\mu\nu}}{\sqrt{1 + 2 \psi_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}} \left(m c^2 \frac{\nabla u^\nu}{ds} - F^\nu \right),$$

$$F^\nu = m c^2 \left(- \Delta^\nu_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma + u^\nu u^\rho \partial_\rho \mathrm{Log} \sqrt{1 + 2 \psi_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta} \right) + + e \hat{g}^{\nu\rho} F_{\lambda\rho} u^\lambda \sqrt{1 + 2 \psi_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta},$$

h) $$L^\mu = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = - \nabla_\nu \hat{G}^{\mu\nu},$$

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_{\mu\nu}} = \frac{1}{\chi} h S^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \hat{g}^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \hat{G}^{\rho\sigma} + \hat{g}^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} \hat{G}^{\nu\sigma},$$

$$\hat{G}^{\rho\sigma} = h F^{\rho\sigma}, \qquad F^{\rho\sigma} = g^{\rho\mu} \hat{g}^{\sigma\nu} F_{\mu\nu},$$

i) $$T^{\mu\nu} - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = L^{\mu\nu}.$$

Posons, comme dans le paragraphe II.2,

$$\mu = \sum_N m_N \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) = \mu_0 \sqrt{-g} \frac{dx^0}{ds},$$

$$\rho = \sum_N e_N \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) = \rho_0 \sqrt{-g} \frac{dx^0}{ds}.$$

Le rapport entre la charge et la masse d'une particule est une constante k. Par conséquent, $\rho_0/\mu_0 = k$. L'équation (II-24) s'écrit alors

(II-78)
$$\delta I = \int_D \left[\frac{1}{c} (L^\mu + J^\mu) \delta^* A_\mu + \frac{1}{c} (L^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}) \delta^* \psi_{\mu\nu} + \right.$$
$$+ \frac{1}{2c} (T^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}) \delta^* g_{\mu\nu} + \frac{1}{c} \frac{\hat{g}_{\mu\nu}}{\sqrt{1 + 2 \psi_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}} \left(\mu_0 c^2 \frac{\nabla u^\nu}{ds} - f^\nu \right) \delta x^\mu -$$
$$\left. - \mu_0 c \frac{d}{ds} (U_\mu \delta x^\mu) \right] \sqrt{-g}\, d^4x + \frac{1}{c} \int_D \partial_\rho \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho A_\mu)} \delta^* A_\mu + \right.$$
$$+ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \psi_{\mu\nu})} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\sigma \psi_{\mu\nu})} \right] \delta^* \psi_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\sigma \psi_{\mu\nu})} \delta^* \partial_\sigma \psi_{\mu\nu} +$$
$$\left. + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho g_{\mu\nu})} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})} \right] \delta^* g_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})} \delta^* \partial_\sigma g_{\mu\nu} + \delta x^\rho \mathcal{L} \right\} d^4x = 0,$$

où l'on a posé

$$J^\mu = \rho_0 u^\mu, \qquad M^{\mu\nu} = \mu_0 c^2 u^\mu u^\nu / \sqrt{1 + 2 \psi_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta},$$
$$f^\nu = \mu_0 c^2 \left(- \Delta^\nu_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma + u^\nu u^\rho \partial_\rho \mathrm{Log} \sqrt{1 + 2 \psi_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta} \right) + + \rho_0 \hat{g}^{\nu\rho} F_{\lambda\rho} u^\lambda \sqrt{1 + 2 \psi_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta},$$

$$U_\mu = \frac{u_\mu + 2\,\psi_{\mu\nu}\,u^\nu}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}} - \frac{k}{c^2}\,A_\mu\,.$$

Les équations du mouvement et du champ sont respectivement :

$$\mu_0\,c^2\,\nabla u^\nu/ds = f^\nu\,; \qquad L^\mu + J^\mu = 0\,, \qquad L^{\mu\nu} - M^{\mu\nu} = 0\,.$$

La formule (II-77 h) montre que si le tenseur $F_{\mu\nu}$ représente l'induction magnétique $\vec{B}$ et le champ électrique $\vec{E}$, le tenseur $G^{\mu\nu}$ devrait être interprété comme représentant le champ magnétique $\vec{H}$ et l'induction électrique $\vec{D}$ dans le champ gravitationnel.

Pour obtenir les lois de conservation nous écrirons, comme au paragraphe II.2, que l'intégrale d'action du système est invariante par rapport au groupe d'isométries de l'espace-temps et par rapport au changement des coordonnées de l'espace-temps.

A) Si la transformation infinitésimale (II-10) est une isométrie de l'espace-temps, définie par (II-5) et (II-6), on aura

$$\text{(II-79)} \qquad \begin{cases} \text{a)} & \delta x^\mu = \xi^\mu\,, \\ \text{b)} & \delta^* A_\mu = -\,(A_\rho\,\nabla_\mu \xi^\rho + \xi^\rho\,\nabla_\rho A_\mu)\,, \\ \text{c)} & \delta^* \psi_{\mu\nu} = -\,(\psi_{\mu\rho}\,\nabla_\nu \xi^\rho + \psi_{\rho\nu}\,\nabla_\mu \xi^\rho + \xi^\rho\,\nabla_\rho \psi_{\mu\nu})\,, \\ \text{d)} & \delta^* g_{\mu\nu} = -\,(\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) = 0\,. \end{cases}$$

En tenant compte des équations du mouvement et du champ et de (II-79 d), l'équation (II-78) s'écrirait

$$\text{(II-80)} \quad \delta I = \int_D \left\{ -\,\mu_0\,c\,\frac{\nabla}{ds}(U_\mu\,\xi^\mu) + \frac{1}{c}\,\nabla_\rho \left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho A_\mu)}\,\delta^* A_\mu + \left(\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \psi_{\mu\nu})} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \nabla_\sigma \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\sigma \psi_{\mu\nu})} \right) \delta^* \psi_{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\sigma \psi_{\mu\nu})}\,\delta^* \nabla_\sigma \psi_{\mu\nu} + \xi^\rho\,L \right] \right\} \sqrt{-g}\,d^4x = 0\,.$$

Portant (II-79 b, c) dans (II-80), on obtiendra, par un calcul analogue à celui du paragraphe II.2,

$$\text{(II-81)} \quad \delta I = \int_D \left\{ \left(-\,\mu_0\,c\,\frac{\nabla U_\mu}{ds} + \frac{1}{c}\,\nabla_\rho \theta^\rho_\mu \right) \xi^\mu + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left[\mu_0\,c\,(U^\mu u^\nu - U^\nu u^\mu) - \frac{1}{c}\,(\Sigma^{\mu\nu} - \Sigma^{\nu\mu}) \right] \nabla_\mu \xi_\nu \right\} \sqrt{-g}\,d^4x = 0\,,$$

où l'on a posé

$$\theta^\rho_\mu = -\,\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho A_\chi)}\,\nabla_\mu A_\chi - \left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \psi_{\chi\beta})} - \nabla_\sigma \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\sigma \psi_{\chi\beta})} \right] \nabla_\mu \psi_{\chi\beta} -$$

$$- \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\sigma \psi_{\alpha\beta})}\,\nabla_\mu \nabla_\sigma \psi_{\alpha\beta} + \delta^\rho_\mu\,L\,,$$

$$\Sigma^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \Theta^{\mu\nu}, \qquad \Theta^{\mu\nu} = \nabla_\rho U^{\rho\mu\nu\sigma}, \qquad U^{\rho\sigma}_\chi = A_\chi\,G^{\rho\sigma} - \frac{h}{\chi}\,g^{\rho\mu}\,g^{\sigma\nu}\,(\nabla_\mu \psi_{\chi\nu} - \nabla_\nu \psi_{\chi\mu})$$

(les indices sont abaissés ou élevés au moyen des $g_{\mu\nu}$ ou $g^{\mu\nu}$).

On déduit de (II-81) les dix lois de conservation du système :

$$\text{(II-82)} \qquad \begin{cases} \text{a)} & \mu_0\,c^2\,\nabla U_\mu/ds = \nabla_\rho \theta^\rho_\mu\,, \\ \text{b)} & \mu_0\,c^2(U^\mu u^\nu - U^\nu u^\mu) = \Sigma^{\mu\nu} - \Sigma^{\nu\mu}\,. \end{cases}$$

Les tenseurs θ^ρ_μ, $\Theta^{\mu\nu}$ et $\Sigma^{\mu\nu}$ seront respectivement le tenseur impulsion-énergie

canonique (ou orbital), le tenseur impulsion-énergie spinoriel et le tenseur impulsion-énergie total.

Si le système de coordonnées de l'espace-temps est un système de coordonnées cartésiennes, on déduira des lois de conservation (II-82) les équations suivantes :

$$\mu_0 c^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(x^\mu U^\nu - x^\nu U^\mu) = \partial_\sigma j^{\mu\nu\sigma},$$

où

$$j^{\mu\nu\sigma} = x^\mu \Sigma^{\nu\sigma} - x^\nu \Sigma^{\mu\sigma} = m^{\mu\nu\sigma} + s^{\mu\nu\sigma},$$
$$m^{\mu\nu\sigma} = x^\mu \theta^{\nu\sigma} - x^\nu \theta^{\mu\sigma}, \quad s^{\mu\nu\sigma} = x^\mu \Theta^{\nu\sigma} - x^\nu \Theta^{\mu\sigma}.$$

Les tenseurs $m^{\mu\nu\sigma}$, $s^{\mu\nu\sigma}$ et $j^{\mu\nu\sigma}$ seront respectivement le moment canonique (ou orbital), le moment spinoriel et le moment total.

B) Si la transformation infinitésimale (II-10) est une transformation infinitésimale des coordonnées curvilignes de l'espace-temps définie par (II-7), l'équation (II-78) s'écrira

$$\text{(II-83)} \quad \delta I = \frac{1}{c}\int_D \Big[(L^\mu + J^\mu)\,\delta^* A_\mu + (L^{\mu\nu} - M^{\mu\nu})\,\delta^* \psi_{\mu\nu} +$$
$$+ \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - M^{\mu\nu})\,\delta^* g_{\mu\nu} + \frac{\hat{g}_{\mu\nu}}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}}\left(\mu_0 c^2 \frac{\nabla u^\nu}{\mathrm{d}s} - f^\nu\right)\alpha^\mu\Big]\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = 0.$$

Portant $\delta^* g_{\mu\nu} = -(\nabla_\mu \alpha_\nu + \nabla_\nu \alpha_\mu)$ dans (II-83) et intégrant par parties, nous obtiendrons

$$\text{(II-84)} \quad \delta I = \frac{1}{c}\int_D \Big[(L^\mu + J^\mu)\,\delta^* A_\mu + (L^{\mu\nu} - M^{\mu\nu})\,\delta^* \psi_{\mu\nu} +$$
$$+ \nabla_\nu(T^{\mu\nu} - M^{\mu\nu})\,\alpha_\mu - \frac{\hat{g}_{\mu\nu}}{\sqrt{1 + 2\,\psi_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta}}\left(\mu_0 c^2 \frac{\nabla u^\nu}{\mathrm{d}s} - f^\nu\right)\alpha^\mu\Big]\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = 0.$$

(II-84) montre que si les équations du champ $L^\mu + J^\mu = 0$, $L^{\mu\nu} - M^{\mu\nu} = 0$ sont satisfaites, les équations

$$\text{(II-85)} \qquad \nabla_\nu(T^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}) = 0$$

entraîneront les équations du mouvement

$$\text{(II-86)} \qquad \mu_0 c^2 \frac{\nabla u^\nu}{\mathrm{d}s} - f^\nu = 0.$$

Inversement, les équations (II-86) impliquent les équations (II-85). La vérification directe de ceci pourrait se faire comme dans le paragraphe II.2.

III. Théorie unitaire de Jordan et Thiry

Nous abordons maintenant l'étude de la théorie de Jordan et Thiry. La variété de Jordan et Thiry sera considérée comme une variété de configuration de trois champs : gravitationnel, électromagnétique et scalaire.

Aux paragraphes III.1 et 2 nous rappellerons brièvement le formalisme de Thiry et Lichnerowicz. Nous pourrons y constater que les transformations de jauge du champ gravitationnel comme celles du champ électromagnétique sont des transformations de coordonnées adaptées de la variété de Jordan et Thiry et qu'on peut définir, dans le procédé de descente, la masse et la charge de la particule

d'épreuve, définitions qui se révéleront, par la suite (§ III.3), compatibles avec les expressions des densités de masse et de charge données par les équations du champ. Nous calculerons ensuite les expressions du tenseur d'Einstein et les équations du champ en coordonnées naturelles adaptées (§ III.4 et 5). Dans le paragraphe III.6 nous calculerons les équations du champ en première approximation et montrerons que, dans cette approximation, l'expression de l'intégrale d'action obtenue par le procédé de descente est acceptable si la théorie est considérée comme une théorie unitaire de trois champs, mais qu'elle est inacceptable si la théorie est considérée comme une théorie unitaire de deux champs (gravitationnel et électromagnétique) seulement.

Notations. —

$\mu, \nu, \alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2, 3, 4$;

$i, j, k, l, \ldots = 1, 2, 3, 4$;

$A, B, C, D, \ldots = 1, 2, 3$;

$x^4 = t$, x^A sont les variables spatiales ;

V_5 est la variété de Jordan et Thiry munie de la métrique $d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$;

V_4 est la variété quotient de V_5 par le groupe d'isométries à un paramètre de V_5 ;

W_4 est la section de V_5 par $x^0 = \text{Cte}$;

Les variétés V_4 et W_4 sont munies, soit de la métrique $d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j$, $\hat{g}_{ij} = \gamma_{ij} - (\gamma_{0i}\,\gamma_{0j}/\gamma_{00})$, soit de la métrique $d\overset{*}{s}{}^2 = \overset{*}{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j$, $\overset{*}{g}_{ij} = \xi\, \hat{g}_{ij}$;

métrique	$d\sigma$	$d\hat{s}$	$d\overset{*}{s}$
discriminant	γ	$\hat{g}$	$\overset{*}{g}$
connexion riemannienne	$\Gamma^\rho_{\mu\nu}$	$\left\{ \begin{matrix} \hat{k} \\ i\,j \end{matrix} \right\}$	$\left\{ \begin{matrix} \overset{*}{k} \\ i\,j \end{matrix} \right\}$
dérivation covariante	D_ρ	$\hat{\nabla}_i$	$\overset{*}{\nabla}_i$
tenseur de Ricci	$R_{\mu\nu}$	$\hat{R}_{ij}$	$\overset{*}{R}_{ij}$
tenseur d'Einstein	$S_{\mu\nu}$	$\hat{S}_{ij}$	$\overset{*}{S}_{ij}$

1. **La variété de Jordan et Thiry.** — La variété de Jordan et Thiry est une variété différentiable V_5, à 5 dimensions, de classe C^2, C^4 par morceaux et munie d'une métrique de type hyperbolique normal (de signature $- - - - +$). L'expression de cette métrique dans un système de coordonnées locales admissibles est $d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x^\alpha)\, dx^\mu\, dx^\nu$; les fonctions $\gamma_{\mu\nu}(x^\alpha)$ sont de classe C^1, C^3 par morceaux.

On suppose que V_5 admet un groupe d'isométries globales à un paramètre de V_5 à trajectoires z orientées de façon que $d\sigma^2 < 0$ et défini par une transformation du type

$$\text{(III-1)} \qquad \bar{x}^\mu = f^\mu(x^\alpha, a)\,, \quad \det |\partial f^\mu / \partial x^\nu| \neq 0\,.$$

La transformation identique correspond à $a = 0$ et les $f^\mu(x^\alpha, a)$ satisfont aux conditions d'invariance de la métrique :

$$\text{(III-2)} \qquad \gamma_{\mu\nu}(x^\alpha) = \gamma_{\rho\sigma}\big[f^\alpha(x^\beta, a)\big] \frac{\partial f^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\nu}\,.$$

Si la métrique est invariante par rapport à la transformation globale (III-1),

elle le sera aussi par rapport à la transformation infinitésimale $\bar{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon\,\xi^\mu$, où ε est un paramètre infinitésimal et

$$\xi^\mu = \left.\frac{\partial f^\mu}{\partial a}\right|_{a=0} .$$

(III-2) s'écrit alors

(III-3) $$D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu = 0 \qquad (\xi_\mu = \gamma_{\mu\nu}\,\xi^\nu) .$$

ξ^μ est appelé vecteur de Killing du groupe d'isométries de V_5. Par hypothèse on a $\gamma_{\mu\nu}\,\xi^\mu\,\xi^\nu < 0$.

Considérons maintenant une transformation de coordonnées locales de V_5, $x'^\mu = \varphi^\mu(x^\alpha)$, où les $\varphi^i(x^\alpha)$ sont solutions des équations différentielles $\xi^\mu\,\partial_\mu \varphi^i = 0$ et $\varphi^0(x^\alpha)$ est une fonction quelconque telle que $\det|\partial\varphi^\mu/\partial x^\nu| \neq 0$. Dans ces nouvelles coordonnées, les composantes contravariantes du vecteur de Killing sont :

(III-4) $$\xi'^i = \xi^\mu\,\partial_\mu \varphi^i = 0 , \quad \xi'^0 = \xi^\mu\,\partial_\mu \varphi^0 \neq 0 .$$

Soit V_4 la variété quotient de V_5 par la relation d'équivalence définie par le groupe d'isométries de V_5. (III-4) montre que, dans les coordonnées x'^μ, les trajectoires z sont des lignes $x'^i = \text{Cte}$. Par conséquent, les x'^i forment un système de coordonnées locales d'un point de V_4.

Effectuons maintenant un second changement de coordonnées locales de V_5 défini par $x''^i = x'^i$, $x''^0 = \int \frac{dx'^0}{\xi'^0}$. Dans les coordonnées x''^μ, les composantes contravariantes du vecteur de Killing sont $\xi''^\mu = \xi'^\nu\,\partial x''^\mu/\partial x'^\nu = \delta^\mu_0$.

Nous avons donc [8] : *les coordonnées de V_5 peuvent être choisies de telle manière que les composantes contravariantes du vecteur de Killing soient de la forme $\xi^\mu = \delta^\mu_0$.*

Un tel système de coordonnées sera appelé système de coordonnées adapté au groupe d'isométries. Les coordonnées adaptées sont définies, au changement de coordonnées près, par

(III-5) $$x'^i = \varphi^i(x^j) , \qquad x'^0 = x^0 + \psi(x^j) ,$$

avec $\det|\partial x'^\mu/\partial x^\nu| \neq 0$. En effet, dans la transformation (III-5) nous avons encore $\xi'^\mu = \xi^\nu\,\partial_\nu x'^\mu = \partial_0 x'^\mu = \delta^\mu_0$. Les équations finies du groupe d'isométries de V_5 s'écrivent, en coordonnées adaptées, $\bar{x}^i = x^i$, $\bar{x}^0 = x^0 + a$ et les équations de Killing (III-3) se réduisent à $\partial_0 \gamma_{\mu\nu} = 0$. Les $\gamma_{\mu\nu}$ sont donc indépendants de la variable x^0.

Dans la suite, nous n'introduirons que des coordonnées, locales adaptées. Dans un tel système de coordonnées les sections W_4 de V_5 par $x^0 = \text{Cte}$ sont homéomorphes à V_4 et $\gamma_{\mu\nu}\,\xi^\mu\,\xi^\nu = \gamma_{00} < 0$. Nous poserons $\gamma_{00} = -\xi^2$.

La métrique $d\sigma^2$ pourrait aussi s'écrire sous la forme

(III-6) $$d\sigma^2 = -(\omega^0)^2 + d\hat{s}^2 ,$$

avec

$$\omega^0 = -\frac{1}{\xi}(\gamma_{00}\,dx^0 + \gamma_{0i}\,dx^i) , \qquad d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij}\,dx^i\,dx^j , \qquad \hat{g}_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{0i}\,\gamma_{0j}}{\gamma_{00}} .$$

Les quantités $\hat{g}_{ij}$ définissent sur W_4 un champ de tenseurs métriques. Ces quantités sont invariantes par rapport au changement du système des sections :

(III-7) $$x^i = x^i_1 , \qquad x^0 = x^0_1 + \Lambda(x^j_1) .$$

Par conséquent, elles définissent aussi d'une façon intrinsèque — par les homéo-

morphismes des sections sur V_4 — un champ de tenseurs métriques sur V_4. Le tenseur contravariant associé est $\hat{g}^{ij} = \gamma^{ij}$.

Considérons, dans V_5, le vecteur A_λ défini par $\beta A_\lambda = -\xi_\lambda/\xi^2 = \gamma_{0\lambda}/\gamma_{00}$, où β est une constante. Les A_i définissent sur W_4 un champ de vecteurs covariants et, dans la transformation (III-7), ces quantités se transforment selon la formule

(III-8) $$\beta A'_i = \beta A_i + \partial_i \Lambda .$$

Le rotationnel $F_{\lambda\mu} = \partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda$ est tel que $F_{0\lambda} = 0$ et les F_{ij}, étant invariants par rapport à (III-7), définissent intrinsèquement sur V_4 un champ de tenseurs antisymétrique. La nullité de ce tenseur exprime que les trajectoires z sont les trajectoires orthogonales de sections locales.

On est ainsi amené à identifier la variété quotient V_4 munie de la métrique $d\hat{s}^2$ à la variété einsteinienne (7) et F_{ij} au tenseur champ électromagnétique. Signalons que ξ est un scalaire intrinsèquement défini sur V_4 ; son interprétation sera donnée plus tard. L'équation (III-8) est la transformation de jauge du champ électromagnétique. Par abus de langage, la transformation (III-7) s'appellera aussi transformation de jauge du champ électromagnétique. On peut aussi ajouter à (III-7) la transformation de jauge du champ gravitationnel (cf. § I.7) $x^i = \Lambda^i(x_1^i)$, $x^0 = x_1^0$. Ainsi les transformations de jauge du champ électromagnétique et du champ gravitationnel apparaissent comme des transformations de coordonnées locales adaptées de la variété V_5.

2. **Procédé de descente de Thiry et Lichnerowicz.** — Considérons une particule d'épreuve ponctuelle de masse (au repos) $m = \text{Cte}$, dont les trajectoires se présentent paramétriquement par les géodésiques de la variété V_5. Ces trajectoires sont donc des extrêmales de l'intégrale

(III-9) $$\mathcal{S}_p = -m c \int_{x_0}^{x_1} d\sigma = -m c \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{F}\, d\tau ,$$

avec $\mathcal{F} = \sqrt{\gamma_{\mu\nu}\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ et $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$. Cherchons à douer V_4 d'une métrique finslérienne $F(x^i, dx^j, h)$, $h = \text{Cte}$, telle qu'aux extrémales de (III-9) correspondent par projection sur V_4 des extrémales de

(III-10) $$I_p = -m c \int_{z_0}^{z_1} F(x^i, \dot{x}^j, h)\, d\tau .$$

Le système différentiel aux extrémales

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \dot{x}^\alpha , \qquad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha} = 0$$

admet l'invariant intégral relatif

$$\omega = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}^i} dx^i + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}^0} dx^0$$

et l'intégrale première $\partial \mathcal{F}/\partial \dot{x}^0 = h$ ou

(III-11) $$\gamma_{00}\, \dot{x}^0 + \gamma_{0i}\, \dot{x}^i = h\, \mathcal{F} .$$

D'autre part, la décomposition (III-6) donne, d'après (III-11),

(III-12) $$d\hat{s} = d\sigma \sqrt{1 - (h^2/\gamma_{00})} .$$

(7) Dans la suite, on considérera aussi le cas où la variété V_4 est munie de la métrique $d\hat{s}^{*2} = \xi\, d\hat{s}^2$.

On en déduit, d'après (III-11) et (III-12),

$$\text{(III-13)} \qquad \dot{x}^0 = \frac{h}{\gamma_{00}} \sqrt{\frac{\hat{g}_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j}{1-(h^2/\gamma_{00})}} - \frac{\gamma_{0i}\,\dot{x}^i}{\gamma_{00}} = \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)\,.$$

Considérons la famille E_h des extrémales de (III-9) correspondant à une valeur déterminée de h. Pour les E_h, le dernier terme de ω a la valeur $h\,dx^0$ et définit un invariant relatif. Il en résulte que cette famille E_h admet l'invariant intégral relatif

$$\text{(III-14)} \qquad (\partial \mathcal{F}/\partial \dot{x}^k)\,dx^k\,.$$

Or, d'après l'homogénéité de $\mathcal{F}$, on a $\dot{x}^\mu\,\partial\mathcal{F}/\partial\dot{x}^\mu = \mathcal{F}$. Par suite, pour toute solution de (III-11) ou (III-13), la quantité $\dot{x}^k\,\partial\mathcal{F}/\partial\dot{x}^k$ peut s'exprimer par une fonction F des variables x^k, $\dot{x}^l$, h :

$$F(x^k, \dot{x}^l, h) = \mathcal{F}[x^k, \dot{x}^l, \varphi(x^i, \dot{x}^j, h)] - h\,\varphi(x^k, \dot{x}^l, h)\,,$$

ou, d'après (III-12) et (III-13),

$$\text{(III-15)} \qquad F(x^k, \dot{x}^l, h) = \sqrt{\left(1-\frac{h^2}{\gamma_{00}}\right) g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j} + h\,\frac{\gamma_{0i}\,\dot{x}^i}{\gamma_{00}}$$

et l'on a $\partial F/\partial\dot{x}^l = \partial\mathcal{F}/\partial\dot{x}^l$. Ainsi, d'après (III-14), les projections des E_h sur V_4 sont définies par un système différentiel qui admet l'invariant intégral relatif $\varpi = (\partial F/\partial\dot{x}^k)\,dx^k$. Autrement dit, ces projections sont extrémales de l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} F(x^k, \dot{x}^l, h)\,d\tau$, où h a la valeur choisie.

Inversement, étant donné localement sur V_4 une fonction du type (III-15), on peut montrer [17] qu'il existe une métrique riemannienne $d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x^k)\,dx^\mu\,dx^\nu$ qui, par descente, conduit à (III-15).

D'après (III-15), l'intégrale d'action (III-10) pourrait aussi s'écrire sous la forme

$$\text{(III-16)} \qquad I_p = \int_{z_0}^{z_1} \left(-\hat{m}\,c\,d\hat{s} + \frac{\hat{e}}{c}\,A_i\,dx^i\right),$$

en posant

$$\text{(III-17)} \qquad \hat{m} = m\sqrt{1+\frac{h^2}{\xi^2}}\,, \qquad \hat{e} = -\,m\,c^2\,\beta\,h\,.$$

On est ainsi amené à identifier $\hat{m}$ et $\hat{e}$ respectivement à la masse et la charge de la particule d'épreuve dans la variété V_4, lorsque la variété V_4 est munie de la métrique $d\hat{s}$.

Dans la théorie de Jordan et Thiry on considère aussi le cas où la variété V_4 est munie de la métrique

$$\text{(III-18)} \qquad d\overset{*}{s} = \sqrt{\xi}\,d\hat{s}\,.$$

(III-16) s'écrirait alors

$$\text{(III-19)} \qquad I_p = \int_{z_0}^{z_1} \left(-\overset{*}{m}\,c\,d\overset{*}{s} + \frac{\overset{*}{e}}{c}\,A_i\,dx^i\right),$$

avec [10, 6*a*]

$$\text{(III-20)} \qquad \overset{*}{m} = \frac{\hat{m}}{\sqrt{\xi}} = m\sqrt{\frac{1}{\xi}\left(1+\frac{h^2}{\xi^2}\right)}, \qquad \overset{*}{e} = \hat{e} = -\,m\,c^2\,\beta\,h\,.$$

Les formules (III-17) et (III-20) montrent que la masse de la particule d'épreuve dans la variété V_4 est variable, que la variété V_4 soit munie de la métrique $d\hat{s}$ ou

de la métrique $d\overset{*}{s}$. En fait, la variation relative de ξ est numériquement petite [17] et nous pouvons considérer cette variation comme pratiquement inobservable. Nous reviendrons sur la question de la vérification expérimentale de (III-16) et (III-19) à la fin de ce chapitre.

3. **Cas de plusieurs particules.** — Dans le cas où il y a plusieurs particules, (III-9) s'écrit

$$\mathcal{I}_p = -\sum_N m_N c \int_{x_{0N}}^{x_{1N}} d\sigma .$$

La descente sur V_4 fournit alors l'intégrale

$$I_p = \sum_N \int_{z_{0N}}^{z_{1N}} \left(-\hat{m}_N c \, d\hat{s} + \frac{\hat{e}_N}{c} A_i \, dx^i \right)$$

ou

$$I_p = \sum_N \int_{z_{0N}}^{z_{1N}} \left(-\overset{*}{m}_N c \, d\overset{*}{s} + \frac{\overset{*}{e}_N}{c} A_i \, dx^i \right),$$

avec

$$\text{(III-21)} \qquad \hat{m}_N = m_N \sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^2}}, \qquad \hat{e}_N = -m_N c^2 \beta h ,$$

$$\text{(III-22)} \qquad \overset{*}{m}_N = \frac{\hat{m}_N}{\sqrt{\xi}} = m_N \sqrt{\frac{1}{\xi}\left(1 + \frac{h^2}{\xi^2}\right)}, \qquad \overset{*}{e}_N = \hat{e}_N = -m_N c^2 \beta h ,$$

Conformément à la définition de la densité (de masse ou de charge) dans une répartition ponctuelle (cf. chap. II de ce travail et L. Landau & E. Lifshitz [16] § 27 et 28), nous poserons

$$\text{(III-23)} \qquad r_0 \sqrt{\gamma} \frac{dx^4}{d\sigma} = \sum_N m_N \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) .$$

$$\text{(III-24)} \qquad \begin{aligned} \hat{\mu}_0 \sqrt{-\hat{g}} \frac{dx^4}{d\hat{s}} &= \sum_N \hat{m}_N \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) , \\ \hat{\rho}_0 \sqrt{-\hat{g}} \frac{dx^4}{d\hat{s}} &= \sum_N \hat{e}_N \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) , \end{aligned}$$

$$\text{(III-25)} \qquad \begin{aligned} \overset{*}{\mu}_0 \sqrt{-\overset{*}{g}} \frac{dx^4}{d\overset{*}{s}} &= \sum_N \overset{*}{m}_N \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) , \\ \overset{*}{\rho}_0 \sqrt{-\overset{*}{g}} \frac{dx^4}{d\overset{*}{s}} &= \sum_N \overset{*}{e}_N \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_N) . \end{aligned}$$

Tenant compte de (III-21), (III-22) et (III-23), les formules (III-24) et (III-25) donnent

$$\text{(III-26)} \qquad \hat{\mu}_0 = r_0 \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-\hat{g}}} \frac{d\hat{s}}{d\sigma} \sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^2}}, \qquad \hat{\rho}_0 = -r_0 c^2 \beta h \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-\hat{g}}} \frac{d\hat{s}}{d\sigma},$$

$$\text{(III-27)} \qquad \overset{*}{\mu}_0 = r_0 \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-\overset{*}{g}}} \frac{d\overset{*}{s}}{d\sigma} \sqrt{\frac{1}{\xi}\left(1 + \frac{h^2}{\xi^2}\right)}, \qquad \overset{*}{\rho}_0 = -r_0 c^2 \beta h \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-\overset{*}{g}}} \frac{d\overset{*}{s}}{d\sigma}.$$

Nous démontrerons aux paragraphes suivants que

$$\text{(III-28)} \qquad \sqrt{\gamma} = \xi \sqrt{-\hat{g}} = \frac{1}{\xi} \sqrt{-\overset{*}{g}} .$$

Par conséquent, (III-26) et (III-27) s'écriront, d'après (III-28), (III-12) et (III-18),

$$\text{(III-29)} \qquad \hat{\mu}_0 = r_0\,\xi\left(1+\frac{h^2}{\xi^2}\right), \qquad \hat{\rho}_0 = -\,r_0\,c^2\,\beta\,h\,\xi\,\sqrt{1+\frac{h^2}{\xi^2}},$$

$$\text{(III-30)} \qquad \overset{*}{\mu}_0 = \frac{r_0}{\xi}\left(1+\frac{h^2}{\xi^2}\right), \qquad \overset{*}{\rho}_0 = -\,r_0\,c^2\,\beta\,h\,\sqrt{\frac{1}{\xi}\left(1+\frac{h^2}{\xi^2}\right)}.$$

Nous verrons (§ III.5) que les expressions de $\hat{\mu}_0$, $\hat{\rho}_0$, $\overset{*}{\mu}_0$, $\overset{*}{\rho}_0$ trouvées ici coïncident avec celles données par les équations du champ de Jordan et Thiry.

4. **Composantes des tenseurs de Riemann, de Ricci et d'Einstein de V_5 en repère naturel adapté.** — Portant

$$\gamma_{ij} = \hat{g}_{ij} - \beta^2\,\xi^2\,A_i\,A_j\,, \quad \gamma_{0i} = -\,\beta\,\xi^2\,A_i\,, \quad \gamma_{00} = -\,\xi^2\,,$$
$$\gamma^{ij} = \hat{g}^{ij}\,, \quad \gamma^{0i} = -\,\beta\,\hat{g}^{ij}\,A_j\,, \quad \gamma^{00} = -\,\frac{1}{\xi^2} + \beta^2\,\hat{g}^{ij}\,A_i\,A_j$$

dans l'expression des coefficients de la connexion riemannienne de V_5,

$$\Gamma^{\circ}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\,\gamma^{\rho\sigma}\,(\partial_\mu\gamma_{\nu\sigma} + \partial_\nu\gamma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\gamma_{\mu\nu}),$$

nous obtiendrons

$$\Gamma^k_{ij} = \left\{\begin{matrix}\hat{k}\\ i\,j\end{matrix}\right\} - \frac{\beta^2}{2}\,\xi^2\,\hat{g}^{kl}\,(A_i\,F_{jl} + A_j\,F_{il}) + \beta^2\,\xi\,A_i\,A_j\,\hat{g}^{kl}\,\partial_l\xi\,,$$

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{\beta^3}{2}\,\xi^2\,\hat{g}^{kl}\,A_k\,(A_i\,F_{jl} + A_j\,F_{il}) - \beta^3\,\xi\,\hat{g}^{kl}\,A_k\,A_i\,A_j\,\partial_l\xi + \\ + \frac{\beta}{2\,\xi^2}\,[\hat{\nabla}_i(\xi^2\,A_j) + \hat{\nabla}_j(\xi^2\,A_i)],$$

$$\Gamma^k_{0i} = \frac{\beta}{2}\,\xi^2\,\hat{g}^{kl}\,F_{li} + \beta\,\xi\,A_i\,\hat{g}^{kl}\,\partial_l\xi\,, \qquad \Gamma^k_{00} = \xi\,\hat{g}^{kl}\,\partial_l\xi\,,$$

$$\Gamma^0_{0i} = -\,\frac{\beta^2}{2}\,\xi^2\,\hat{g}^{kl}\,A_k\,F_{li} - \beta^2\,\xi\,\hat{g}^{kl}\,A_k\,A_i\,\partial_l\xi + (\partial_i\xi/\xi)\,,$$

$$\Gamma^0_{00} = -\,\beta\,\xi\,\hat{g}^{kl}\,A_k\,\partial_l\xi\,.$$

Nous en déduisons $\Gamma^\mu_{l\mu} = \partial_l \mathrm{Log}\,\sqrt{\gamma} = \partial_l \mathrm{Log}(\xi\,\sqrt{-\hat{g}})$, d'où $\sqrt{\gamma} = \xi\,\sqrt{-\hat{g}}$. Portant les valeurs de $\gamma_{\mu\nu}$ et $\Gamma^\circ_{\mu\nu}$ dans

$$R_{\mu\nu,\rho\sigma} = \tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu\partial_\rho\gamma_{\nu\sigma} + \partial_\nu\partial_\sigma\gamma_{\mu\rho} - \partial_\mu\partial_\sigma\gamma_{\nu\rho} - \partial_\nu\partial_\rho\gamma_{\mu\sigma}) + \gamma_{\lambda\tau}\,(\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\,\Gamma^\tau_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\,\Gamma^\tau_{\nu\rho})\,,$$

nous obtiendrons

$$R_{ij,kl} = \hat{R}_{ij,kl} - \frac{\beta^2}{4}\,\xi^2\,(F_{ik}\,F_{jl} - F_{il}\,F_{jk}) - \frac{\beta^2}{2}\,\xi^2\,F_{ij}\,F_{kl} + \\ + \frac{\beta^4}{4}\,\xi^4\,\hat{g}^{rs}\,(A_i\,F_{jr} - A_j\,F_{ir})\,(A_l\,F_{ks} - A_k\,F_{ls}) + \\ + \beta^2\,\xi\,[A_j\,(A_k\,\hat{\nabla}_l\partial_i\xi - A_l\,\hat{\nabla}_k\partial_i\xi) - A_i\,(A_k\,\hat{\nabla}_l\partial_j\xi - A_l\,\hat{\nabla}_k\partial_j\xi)] + \\ + \frac{\beta^2}{2}\,[A_i\,\hat{\nabla}_j(\xi^2\,F_{kl}) - A_j\,\hat{\nabla}_i(\xi^2\,F_{kl}) + A_k\,\hat{\nabla}_l(\xi^2\,F_{ij}) - A_l\,\hat{\nabla}_k(\xi^2\,F_{ij})] + \\ + \frac{\beta^2}{2}\,\xi\,[A_i\,(F_{jl}\,\partial_k\xi - F_{jk}\,\partial_l\xi) - A_j\,(F_{il}\,\partial_k\xi - F_{ik}\,\partial_l\xi) + \\ + A_k\,(F_{lj}\,\partial_i\xi - F_{li}\,\partial_j\xi) - A_l\,(F_{kj}\,\partial_i\xi - F_{ki}\,\partial_j\xi)],$$

$$R_{ij,10} = -\frac{\beta}{2}\left[\hat{\nabla}_1(\xi^2 F_{ij}) - \xi\,(\partial_i\xi\, F_{j1} - \partial_j\xi\, F_{i1})\right] +$$
$$+ \beta\,\xi\,(A_i\,\hat{\nabla}_j\partial_1\xi - A_j\,\hat{\nabla}_i\partial_1\xi) + \frac{\beta^3}{4}\,\xi^4\,\hat{g}^{rs}\,F_{ir}\,(A_i\,F_{js} - A_j\,F_{is}),$$
$$R_{i0,10} = -\,\xi\,\hat{\nabla}_i\partial_1\xi - \frac{\beta^2}{4}\,\xi^4\,\hat{g}^{rs}\,F_{ir}\,F_{ls}\,.$$

D'où les expressions de $R_{\mu\nu} = \gamma^{\rho\sigma}\,R_{\rho\mu,\nu\sigma}$, $R = \gamma^{\mu\nu}\,R_{\mu\nu}$:

(III-32)
$$\left\{\begin{array}{l}
\text{a)}\quad R_{ij} = \hat{R}_{ij} + \dfrac{\beta^2}{2}\,\xi^2\,\hat{g}^{kl}\,F_{ik}\,F_{jl} - \dfrac{1}{\xi}\,\hat{\nabla}_i\partial_j\xi - \\
\qquad - \dfrac{\beta^2}{2\,\xi}\,\hat{g}^{kl}\left[A_i\,\hat{\nabla}_k(\xi^3\,F_{jl}) + A_j\,\hat{\nabla}_k(\xi^3\,F_{il})\right] + \\
\qquad + \beta^2\,\xi\,A_i\,A_j\left(\hat{\Box}\xi + \dfrac{\beta^2}{4}\,\xi^3\,F_{kl}\,\hat{F}^{kl}\right), \\
\text{b)}\quad R_{i0} = -\dfrac{\beta}{2\,\xi}\,\hat{g}^{kl}\,\hat{\nabla}_k(\xi^3\,F_{il}) + \beta\,\xi\,A_i\left(\hat{\Box}\xi + \dfrac{\beta^2}{4}\,\xi^3\,F_{kl}\,\hat{F}^{kl}\right), \\
\text{c)}\quad R_{00} = \xi\left(\hat{\Box}\xi + \dfrac{\beta^2}{4}\,\xi^3\,F_{kl}\,\hat{F}^{kl}\right), \\
\text{d)}\quad R = \hat{R} + \dfrac{\beta^2}{4}\,\xi^2\,F_{kl}\,\hat{F}^{kl} - \dfrac{2}{\xi}\,\hat{\Box}\xi\,,
\end{array}\right.$$

avec $\hat{F}^{kl} = \hat{g}^{ki}\,\hat{g}^{lj}F_{ij}$, $\hat{\Box} = \hat{g}^{ij}\,\hat{\nabla}_i\hat{\nabla}_j$.

Les composantes les plus simples du tenseur d'Einstein, $S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\gamma_{\mu\nu}R$, sont :

(III-33)
$$\left\{\begin{array}{l}
\text{a)}\quad S^{ij} = \hat{S}^{ij} + \dfrac{\beta^2}{2\,\xi}\left(-\dfrac{1}{4}\,\hat{g}^{ij}\,F_{kl}\,\hat{H}^{kl} + \hat{g}^{ik}\,F_{kl}\,\hat{H}^{jl}\right) - \\
\qquad - \dfrac{1}{\xi}\,(\hat{g}^{ik}\,\hat{g}^{jl}\,\hat{\nabla}_k\partial_l\xi - \hat{g}^{ij}\,\hat{\Box}\xi)\,, \\
\text{b)}\quad S^{i}_{0} = -\dfrac{\beta}{2\,\xi}\,\hat{\nabla}_j\hat{H}^{ij}\,, \\
\text{c)}\quad S_{00} = \dfrac{1}{2}\,\xi^2\,\hat{R} + \dfrac{3}{8}\,\beta^2\,\xi\,F_{kl}\,\hat{H}^{kl} \qquad (\hat{H}^{kl} = \xi^3\,\hat{F}^{kl})\,.
\end{array}\right.$$

5. **Les équations du champ de la théorie de Jordan et Thiry.** — Les équations du champ de la théorie de Jordan et Thiry sont obtenues en généralisant celles d'Einstein. Elles pourraient donc s'écrire

(III-34) $$S^{\mu\nu} = \chi_0\,r_0\,c^2\,v^\mu\,v^\nu\,,$$

avec

(III-35) $$\chi_0 = \beta^2/2\,, \qquad v^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\sigma\,.$$

1. Les quatorze équations de la gravitation et de l'électromagnétisme. — Posons

(III-36) $$\hat{u}^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\hat{s} = v^i/\sqrt{1 + (h^2/\xi^2)}\,.$$

Nous avons d'autre part, d'après (III-11),

(III-37) $$v_0 = \gamma_{00}\,v^0 + \gamma_{0i}\,v^i = h\,.$$

Les 14 équations de la gravitation et de l'électromagnétisme seront celles de

(III-34) correspondant aux composantes S^{ij}, S^{i}_{0}. Elles s'écrivent, d'après (III-33), (III-35), (III-36) et (III-37),

$$\text{(III-38)}\quad \begin{cases} \text{a)} \quad \hat{S}^{ij} + \dfrac{\beta^2}{2\xi}\left(-\dfrac{1}{4}\hat{g}^{ij} F_{kl}\hat{H}^{kl} + \hat{g}^{ik} F_{kl}\hat{H}^{jl}\right) - \\ \qquad - \dfrac{1}{\xi}(\hat{g}^{ik}\hat{g}^{jl}\hat{\nabla}_k\partial_l\xi - \hat{g}^{ij}\,\hat{\Box}\xi) = \chi_0 r_0 c^2 \left(1 + \dfrac{h^2}{\xi^2}\right)\hat{u}^i\hat{u}^j, \\ \text{b)} \quad \nabla_j H^{ij} = -r_0 c^2 \beta h \xi \sqrt{1 + (h^2/\xi^2)}\,\hat{u}^i. \end{cases}$$

Le coefficient du tenseur de Maxwell au premier membre de (III-38a) montre qu'on pourrait interpréter $\chi = \beta^2/2\xi = \chi_0\,\xi$ comme la « constante » de gravitation d'Einstein (*cf.* [17] p. 202), dans la variété V_4 munie de la métrique $d\hat{s}$. Les équations (III-38) pourront alors se mettre sous la forme

$$\hat{S}^{ij} + \chi\left(-\frac{1}{4}\hat{g}^{ij} F_{kl}\hat{H}^{kl} + \hat{g}^{ik} F_{kl}\hat{H}^{jl}\right) - \\ - \frac{1}{\xi}(g^{ik}\hat{g}^{jl}\hat{\nabla}_k\partial_l\xi - g^{ij}\hat{\Box}\xi) = \chi\,\hat{\mu}_0 c^2 \hat{u}^i\hat{u}^j,$$

$$\hat{\nabla}_j\hat{H}^{ij} = \hat{\rho}_0\hat{u}^i,$$

avec

$$\hat{\mu}_0 = r_0\,\xi\left(1 + \frac{h^2}{\xi^2}\right), \qquad \hat{\rho}_0 = -r_0 c^2 \beta h \xi \sqrt{1 + \frac{h^2}{\xi^2}}.$$

On peut constater que ces valeurs de $\hat{\mu}_0$ et $\hat{\rho}_0$ sont identiques à celles données au paragraphe III.3 [(formules (III-29)] par un tout autre procédé.

Dans la métrique $d\overset{*}{s} = \sqrt{\xi}\,d\hat{s}$, on a

$$\text{(III-39)}\quad \begin{cases} \text{a)} \quad \overset{*}{g}_{ij} = \xi\,\hat{g}_{ij}, \qquad \overset{*}{g}^{ij} = \dfrac{1}{\xi}\hat{g}^{ij}, \qquad \sqrt{-\overset{*}{g}} = \xi^2\sqrt{-\hat{g}}, \\ \text{b)} \quad \overset{*}{u}^i = \dfrac{dx^i}{d\overset{*}{s}} = \dfrac{1}{\sqrt{\xi}}\hat{u}^i, \\ \text{c)} \quad \begin{Bmatrix} \overset{*}{k} \\ i\,j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{k} \\ i\,j \end{Bmatrix} + \dfrac{1}{2}\left(\delta^k_i\dfrac{\partial_j\xi}{\xi} + \delta^k_j\dfrac{\partial_i\xi}{\xi} - \hat{g}_{ij}\hat{g}^{kl}\dfrac{\partial_l\xi}{\xi}\right), \\ \text{d)} \quad \overset{*}{R}_{ij} = \hat{R}_{ij} + \dfrac{3}{2}\dfrac{\partial_i\xi}{\xi}\dfrac{\partial_j\xi}{\xi} - \dfrac{1}{\xi}\left(\hat{\nabla}_i\partial_j\xi + \dfrac{1}{2}\hat{g}_{ij}\hat{\Box}\xi\right). \end{cases}$$

Portant ces valeurs dans (III-38), nous obtenons

$$\text{(III-40)}\quad \begin{cases} \text{a)} \quad \overset{*}{S}_{ij} + \chi_0\,(-\tfrac{1}{4}\overset{*}{g}_{ij} F_{kl}\overset{*}{H}^{kl} + \overset{*}{g}_{jk} F_{il}\overset{*}{H}^{kl}) + \\ \qquad + (\tfrac{1}{2}\overset{*}{g}_{ij}\overset{*}{g}^{kl}\partial_k\varphi\,\partial_l\varphi - \partial_i\varphi\,\partial_j\varphi) = \chi_0\,\overset{*}{\mu}_0 c^2\,\overset{*}{u}_i\,\overset{*}{u}_j, \\ \text{b)} \quad \overset{*}{\nabla}_j\overset{*}{H}^{ij} = \overset{*}{\rho}_0\,\overset{*}{u}^i, \end{cases}$$

avec

$$\overset{*}{H}^{ij} = \xi^3\,\overset{*}{F}^{ij} = \xi^3\,\overset{*}{g}^{ik}\,\overset{*}{g}^{jl} F_{kl}, \qquad \varphi = \sqrt{3/2}\,\mathrm{Log}\,\xi, \qquad \overset{*}{u}_i = \overset{*}{g}_{ij}\,\overset{*}{u}^j,$$

$$\overset{*}{\mu}_0 = \frac{r_0}{\xi}\left(1 + \frac{h^2}{\xi^2}\right), \qquad \overset{*}{\rho}_0 = -r_0 c^2 \beta h \sqrt{\frac{1}{\xi}\left(1 + \frac{h^2}{\xi^2}\right)}.$$

Là encore, les expressions de $\overset{*}{\mu}_0$ et $\overset{*}{\rho}_0$ sont identiques à celles données au paragraphe III.3 [formules (III-30)].

Le troisième terme du premier membre de (III-40a) est le tenseur impulsion-

énergie d'un champ scalaire φ sans masse. La variation relative de φ étant très petite, la portée de ce champ scalaire devrait être très grande ([8]).

La théorie de Jordan et Thiry pourrait être alors interprétée comme une théorie unitaire de trois champs sans masse : un champ gravitationnel, un champ électromagnétique et un champ scalaire, de spins respectifs 2, 1 et 0. L'existence du champ scalaire est difficile à prouver, à cause de sa faible variation ([9]). Cependant à l'échelle cosmique ce champ devrait jouer un rôle important.

2. L'équation du champ scalaire. — Nous avons, d'après (III-34),

$$S_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}\gamma_{00} R = \chi_0 r_0 c^2 h^2 , \qquad S = -\frac{3}{2} R = \chi_0 r_0 c^2 .$$

On en déduit

$$R_{00} = \chi_0 r_0 c^2 \xi^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{h^2}{\xi^2}\right)$$

ou, d'après (III-32c),

$$\text{(III-41)} \qquad \hat{\Box}\xi = \chi_0 r_0 c^2 \xi \left(\frac{1}{3} + \frac{h^2}{\xi^2}\right) - \frac{\beta^2}{4} F_{kl} \hat{H}^{kl}$$

ou encore ([10])

$$\text{(III-42)} \qquad \overset{*}{\Box}\varphi = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{\chi_0 r_0 c^2}{\xi} \left(\frac{1}{3} + \frac{h^2}{\xi^2}\right) - \frac{\beta^2}{4} F_{kl} \overset{*}{H}{}^{kl}\right].$$

Signalons que lorsque $r_0 \neq 0$, on a $\varphi \neq 0$ quel que soit h. Le champ scalaire φ est donc un champ de matière qui apparaît en même temps que le champ gravitationnel. Ceci concorde avec l'hypothèse d'Y. Thiry, selon laquelle $\xi \neq 1$.

Remarque. — La densité lagrangienne du champ de Jordan et Thiry est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\chi_0} \mathcal{R} = -\frac{1}{2\chi_0} \sqrt{\gamma}\, R = -\frac{1}{2\chi_0} \xi \sqrt{-\hat{g}}\, R$$

ou, d'après (III-32d),

$$\text{(III-43)} \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2\chi} \sqrt{-\hat{g}}\, \hat{R} - \frac{1}{4} \sqrt{-\hat{g}}\, F_{kl} \hat{H}^{kl} + \frac{1}{\chi_0} \sqrt{-\hat{g}}\, \hat{\Box}\xi$$

ou encore, d'après (III-39),

$$\text{(III-44)} \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2\chi_0} \sqrt{-\overset{*}{g}}\, \overset{*}{R} - \frac{1}{4} \sqrt{-\overset{*}{g}}\, F_{kl} \overset{*}{H}{}^{kl} + \\ + \frac{1}{2\chi_0} \sqrt{-\overset{*}{g}}\, \overset{*}{g}{}^{ij} \partial_i\varphi\, \partial_j\varphi - \frac{1}{\sqrt{6}\,\chi_0} \sqrt{-\overset{*}{g}}\, \overset{*}{\Box}\varphi .$$

([8]) La notation φ employée ici est, à un facteur $1/\chi_0^{1/2}$ près, celle de L. Mariot & P. Pigeaud [18]. Mais leur interprétation est totalement différente de la nôtre. Notons également que le champ φ, que nous étudions ici, possède des propriétés assez semblables à celles du champ scalaire de R. H. Dicke [6*b*], bien que la théorie de Dicke soit différente de celle de Thiry.

([9]) A courte distance son effet est confondu avec celui du champ gravitationnel (voir la fin du paragraphe suivant).

([10]) En effet,

$$\overset{*}{\Box}\varphi = \sqrt{\frac{3}{2}} \overset{*}{g}{}^{ij} \overset{*}{\nabla}_i \frac{\partial_j\xi}{\xi} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\hat{g}^{ij}}{\xi} \left[\frac{\overset{*}{\nabla}_i \partial_j\xi}{\xi} - \frac{\partial_i\xi\, \partial_j\xi}{\xi^2}\right] = \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{g}^{ij} \frac{\hat{\nabla}_i \partial_j\xi}{\xi^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\hat{\Box}\xi}{\xi^2} .$$

Les derniers termes de (III-43) et (III-44) peuvent s'écrire sous la forme d'une divergence :

$$\sqrt{-\hat{g}}\,\hat{\Box}\xi = \sqrt{-\hat{g}}\,\hat{\nabla}_i(\hat{g}^{ij}\,\partial_j\xi) = \partial_i(\sqrt{-\hat{g}}\,\hat{g}^{ij}\,\partial_j\xi)\,,$$
$$\sqrt{-\overset{*}{g}}\,\overset{*}{\Box}\varphi = \sqrt{-\overset{*}{g}}\,\overset{*}{\nabla}_i(\overset{*}{g}^{ij}\,\partial_j\varphi) = \partial_i(\sqrt{-\overset{*}{g}}\,\overset{*}{g}^{ij}\,\partial_j\varphi)\,.$$

Par conséquent, leur contribution dans les équations du champ est nulle. L'expression (III-43) a la même forme que (II-77c) et on reconnaît dans (III-44) la somme des densités lagrangiennes des trois champs.

6. **Approximation newtonienne.** Le calcul des équations du champ de Jordan et Thiry en première approximation se fait comme dans [13], à la seule différence que le champ φ ou ξ est interprété comme un champ scalaire ; par conséquent, le terme provenant de la première approximation de ξ devrait être considéré comme le potentiel approché du champ scalaire.

Nous rappelons les hypothèses suivantes du calcul d'approximation :

a) les champs sont faibles et les coordonnées adaptées sont telles que les $\gamma_{\mu\nu}$ admettent le développement limité

$$\text{(III-45)}\qquad \gamma_{AB} \simeq -\delta_A^B + \frac{\alpha_{AB}}{c^2}\,,\qquad \gamma_{4A} \simeq \frac{\alpha_{4A}}{c^2}\,,\qquad \gamma_{44} \simeq c^2 + \alpha_{44}\,,$$
$$\gamma_{0i} \simeq \frac{\alpha_{0i}}{c^2}\,,\qquad \gamma_{00} \simeq -1 - 4\,\frac{\alpha_{00}}{c^2}$$

(coordonnées quasi galiléennes) [11] ;

b) les coordonnées adaptées satisfont aussi les conditions d'isothermie

$$\sigma^\lambda = -\gamma^{\rho\sigma}\,\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} = 0\,.$$

On peut montrer [13] qu'il est toujours possible de choisir un système quasi galiléen qui soit en même temps un système isotherme.

A partir de (III-45) on obtient facilement les formules suivantes :

$$\text{(III-46)}\qquad \sqrt{\gamma} \simeq c\left(1 + \frac{\alpha_{44}}{2\,c^2} + \frac{2\,\alpha_{00}}{c^2} - \frac{\alpha_{MM}}{2\,c^2}\right)\qquad (\alpha_{MM} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})\,;$$

$$\text{(III-47)}\qquad \gamma^{AB} \simeq -\delta_A^B - \frac{\alpha_{AB}}{c^2}\,,\qquad \gamma^{4A} \simeq \frac{\alpha_{4A}}{c^4}\,,\qquad \gamma^{44} \simeq \frac{1}{c^2} - \frac{\alpha_{44}}{c^4}\,,$$
$$\gamma^{0A} \simeq -\frac{\alpha_{0A}}{c^2}\,,\qquad \gamma^{04} \simeq \frac{\alpha_{04}}{c^4}\,,\qquad \gamma^{00} \simeq -1 + 4\,\frac{\alpha_{00}}{c^2}\,;$$

$$\hat{g}_{AB} \simeq -\delta_A^B + \frac{\alpha_{AB}}{c^2}\,,\qquad \hat{g}_{4A} \simeq \frac{\alpha_{4A}}{c^2}\,,\qquad \hat{g}_{44} \simeq c^2 + \alpha_{44}\,;$$

$$\overset{*}{g}_{AB} \simeq -\delta_A^B + \frac{\alpha_{AB}}{c^2} - \frac{2\,\alpha_{00}}{c^2}\,\delta_A^B\,,\quad \overset{*}{g}_{4A} \simeq \frac{\alpha_{4A}}{c^2}\,,\quad \overset{*}{g}_{44} \simeq c^2 + \alpha_{44} + 2\,\alpha_{00}\,.$$

Le tenseur $S^{\lambda\mu}$ peut s'écrire sous la forme $S^{\lambda\mu} = S^{\lambda\mu}_{(i)} + I^{\lambda\mu}$, avec

$$S^{\lambda\mu}_{(i)} = \tfrac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\gamma^{\lambda\mu} + \tfrac{1}{2}\,\gamma^{\lambda\mu}\gamma^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\partial_\beta \mathrm{Log}\,\sqrt{\gamma} - \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}\,\Gamma^\mu_{\beta\delta}\,\gamma^{\alpha\beta}\,\gamma^{\gamma\delta} + \tfrac{1}{4}\,\gamma^{\lambda\mu}\,\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,\partial_\alpha\gamma^{\beta\gamma}\,,$$
$$I^{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}\left[\partial_\rho\gamma^{\lambda\mu}\,\sigma^\rho + \gamma^{\lambda\mu}\,(\partial_\rho\sigma^\rho + \Gamma^\alpha_{\alpha\rho}\,\sigma^\rho) - \gamma^{\lambda\rho}\,\partial_\rho\sigma^\mu - \gamma^{\mu\rho}\,\partial_\rho\sigma^\lambda\right].$$

En coordonnées isothermes on a donc $I^{\lambda\mu} = 0$.

Portant (III-45), (III-46) et (III-47) dans $S^{\lambda\mu}_{(i)}$ nous obtiendrons

[11] ce qui signifie que dans le formalisme de Rosen les coordonnées de l'espace plat sont cartésiennes.

$$
\text{(III-48)}\quad
\begin{cases}
\text{a)} \quad S^{AB}_{(i)} \simeq -\dfrac{1}{2c^2}\Delta\left[-\alpha_{AB}-\delta^B_A\left(2\alpha_{00}+\dfrac{\alpha_{44}}{2}-\dfrac{\alpha_{MM}}{2}\right)\right], \\
\text{b)} \quad S^{4A}_{(i)} \simeq -\dfrac{1}{2c^4}\Delta\alpha_{4A}, \\
\text{c)} \quad S^{44}_{(i)} \simeq -\dfrac{1}{2c^4}\Delta\left(2\alpha_{00}-\dfrac{\alpha_{MM}}{2}-\dfrac{\alpha_{44}}{2}\right), \\
\text{d)} \quad S^{0A}_{(i)} \simeq \dfrac{1}{2c^2}\Delta\alpha_{0A}, \\
\text{e)} \quad S^{04}_{(i)} \simeq -\dfrac{1}{2c^4}\Delta\alpha_{04}, \\
\text{f)} \quad S^{00}_{(i)} \simeq -\dfrac{1}{2c^2}\Delta\left(2\alpha_{00}+\dfrac{\alpha_{MM}}{2}-\dfrac{\alpha_{44}}{2}\right) \qquad (\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2).
\end{cases}
$$

Nous avons, d'autre part,

$$
v^A = V^A v^4 \qquad (V^A = dx^A/dt),
$$
$$
v^4 = \frac{dx^4}{d\sigma} = \frac{dx^4}{d\hat{s}}\frac{d\hat{s}}{d\sigma} \simeq \frac{1}{c}\sqrt{1+\frac{h^2}{\xi^2}}
$$

et, d'après (III-37), $v^0 = -h$. Portant ces valeurs approchées de v^μ dans l'expression $M^{\mu\nu} = r_0 c^2 v^\mu v^\nu$ et tenant compte de (III-29) et (III-30), nous obtenons

$$
\text{(III-49)}\quad
\begin{cases}
\text{a)} \quad M^{AB} \simeq r_0 V^A V^B\left(1+\dfrac{h^2}{\xi^2}\right) \simeq V^A V^B \sum\limits_N \hat{m}_N \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N), \\
\text{b)} \quad M^{4A} \simeq r_0 V^A\left(1+\dfrac{h^2}{\xi^2}\right) \simeq V^A \sum\limits_N \hat{m}_N \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N), \\
\text{c)} \quad M^{44} \simeq r_0\left(1+\dfrac{h^2}{\xi^2}\right) \simeq \sum\limits_N \hat{m}_N \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N), \\
\text{d)} \quad M^{0A} \simeq -r_0 c h V^A\sqrt{1+\dfrac{h^2}{\xi^2}} \simeq \dfrac{1}{c\beta} V^A \sum\limits_N \hat{e}_N \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N), \\
\text{e)} \quad M^{04} \simeq -r_0 c h\sqrt{1+\dfrac{h^2}{\xi^2}} \simeq \dfrac{1}{c\beta}\sum\limits_N \hat{e}_N \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N), \\
\text{f)} \quad M^{00} \simeq r_0 c^2 h^2.
\end{cases}
$$

(On a $\hat{m}_N \simeq \overset{*}{m}_N$ en première approximation et $\hat{e}_N = \overset{*}{e}_N$.)

Les équations du champ $S^{\mu\nu} = \chi_0 M^{\mu\nu}$ s'écrivent alors, d'après (III-48) et (III-49),

$$
\text{(III-50)}\quad
\begin{cases}
\text{a)} \quad -\dfrac{1}{2c^2}\Delta\left[-\alpha_{AB}-\delta^B_A\left(2\alpha_{00}+\dfrac{\alpha_{44}}{2}-\dfrac{\alpha_{MM}}{2}\right)\right]=0, \\
\text{b)} \quad -\dfrac{1}{2c^4}\Delta\alpha_{4A} = \chi_0 V^A \sum\limits_N \hat{m}_N \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N), \\
\text{c)} \quad -\dfrac{1}{2c^4}\Delta\left(2\alpha_{00}-\dfrac{\alpha_{MM}}{2}-\dfrac{\alpha_{44}}{2}\right) = \chi_0 \sum\limits_N \hat{m}_N \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N), \\
\text{d)} \quad \dfrac{1}{2c^2}\Delta\alpha_{0A} = \dfrac{\beta}{2c} V^A \sum\limits_N \hat{e}_N \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_N),
\end{cases}
$$

$$\text{(III-50)}\qquad \left|\begin{array}{ll} \text{e)} & -\dfrac{1}{2\,c^4}\,\Delta\alpha_{04} = \dfrac{\beta}{2\,c}\sum_{\mathrm{N}}\hat{e}_{\mathrm{N}}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_{\mathrm{N}})\,, \\ \text{f)} & -\dfrac{1}{2\,c^2}\,\Delta\left(2\,\alpha_{00}+\dfrac{\alpha_{\mathrm{MM}}}{2}-\dfrac{\alpha_{44}}{2}\right)=\chi_0\,r_0\,c^2\,h^2\,. \end{array}\right.$$

Posons maintenant

$$\text{(III-51)}\qquad \left|\begin{array}{ll} \text{a)} & \Delta U = -4\,\pi\,G\sum_{\mathrm{N}}\hat{m}_{\mathrm{N}}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_{\mathrm{N}}) \qquad \left(\chi_0=\dfrac{8\,\pi\,G}{c^4}\right), \\ \text{b)} & \Delta P_{\mathrm{A}} = -4\,\pi\,G\,V^{\mathrm{A}}\sum_{\mathrm{N}}\hat{m}_{\mathrm{N}}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_{\mathrm{N}})\,, \\ \text{c)} & \Delta\Phi_{\mathrm{A}} = -\dfrac{1}{c}\,V^{\mathrm{A}}\sum_{\mathrm{N}}\hat{e}_{\mathrm{N}}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_{\mathrm{N}})\,, \\ \text{d)} & \Delta\Phi_4 = c\sum_{\mathrm{N}}\hat{e}_{\mathrm{N}}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_{\mathrm{N}})\,. \end{array}\right.$$

Les 14 premières équations de (III-50) donnent alors

$$\text{(III-52)}\qquad \left|\begin{array}{ll} \text{a)} & \alpha_{\mathrm{AB}}+\delta^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}}\,(2\,\alpha_{00}+\tfrac{1}{2}\,\alpha_{44}-\tfrac{1}{2}\,\alpha_{\mathrm{MM}})=0\,, \\ \text{b)} & \alpha_{4\mathrm{A}}=4\,P_{\mathrm{A}}\,, \\ \text{c)} & 2\,\alpha_{00}-\tfrac{1}{2}\,\alpha_{\mathrm{MM}}-\tfrac{1}{2}\,\alpha_{44}=4\,U\,, \\ \text{d)} & \alpha_{0\mathrm{A}}=-\beta\,c^2\,\Phi_{\mathrm{A}}\,, \\ \text{e)} & \alpha_{04}=-\beta\,c^2\,\Phi_4\,. \end{array}\right.$$

La résolution de (III-52a) et (III-52c) donne

$$\alpha_{44}=-2\,U-2\,\alpha_{00}\,,\qquad \alpha_{\mathrm{AB}}=2\,\delta^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}}\,(\alpha_{00}-U)\,.$$

On en déduit

$$\text{(III-53)}\qquad \begin{aligned} &g_{\mathrm{AB}}\simeq-\delta^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}}+\frac{2}{c^2}\,\delta^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}}\,(\alpha_{00}-U)\,, \\ &\hat{g}_{4\mathrm{A}}\simeq 4\,P_{\mathrm{A}}/c^2\,,\qquad \hat{g}_{44}\simeq c^2-2\,U-2\,\alpha_{00}\,. \end{aligned}$$

$$\text{(III-54)}\qquad \begin{aligned} &\overset{*}{g}_{\mathrm{AB}}\simeq-\delta^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}}-\frac{2\,U}{c^2}\,\delta^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}}\,, \\ &\overset{*}{g}_{1\mathrm{A}}\simeq 4\,P_{\mathrm{A}}/c^2\,,\qquad \overset{*}{g}_{44}\simeq c^2-2\,U\,. \end{aligned}$$

Pour résoudre la quinzième équation de (III-50), remarquons que l'équation

$$\text{(III-55)}\qquad S=\chi_0\,r_0\,c^2$$

s'écrit, d'après (III-48),

$$\text{(III-56)}\qquad -\frac{3}{2\,c^2}\,\Delta\left(2\,\alpha_{00}-\frac{\alpha_{\mathrm{MM}}}{2}+\frac{\alpha_{44}}{2}\right)=\chi_0\,r_0\,c^2\,,$$

d'où, en éliminant $\alpha_{\mathrm{MM}}-\alpha_{44}$ entre (III-50f) et (III-56),

$$\Delta\alpha_{00}=-\frac{c^4}{2}\,\chi_0\,r_0\left(\frac{1}{3}+h^2\right)=-\frac{c^4}{2}\,\chi_0\sum_{\mathrm{N}}m_{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{3}+h^2\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_{\mathrm{N}})\,,$$

d'après (III-23). Posons alors

$$\text{(III-57)}\qquad \alpha_{00}=\Phi_0\,,$$

où Φ_0 est solution de

$$\text{(III-58)}\qquad \Delta\Phi_0=-4\,\pi\,G\sum_{\mathrm{N}}m_{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{3}+h^2\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_{\mathrm{N}})\,;$$

Φ_0 sera appelé potentiel scalaire approché.

Nous obtenons donc finalement l'expression de $\gamma_{\mu\nu}$ en fonction des potentiels approchés gravitationnel, électromagnétique et scalaire :

$$\text{(III-59)}\qquad \begin{aligned} &\gamma_{AB} \simeq -\delta_A^B\left(1+\frac{2U}{c^2}-\frac{2\Phi_0}{c^2}\right),\quad \gamma_{4A}\simeq\frac{4P_A}{c^2},\\ &\gamma_{44}\simeq c^2-2U-2\Phi_0,\quad \gamma_{0i}\simeq-\beta\Phi_i,\quad \gamma_{00}\simeq-1-\frac{4\Phi_0}{c^2}. \end{aligned}$$

Portons maintenant (III-53) et (III-54) dans (III-16) et (III-19) respectivement. Il vient, en supposant $A_i = 0$, $h = 0$ pour simplifier le problème,

$$\text{(III-60)}\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \delta I_p = \delta\int_{z_0}^{z_1}\hat{m}\left(\frac{V^2}{2}+U+\Phi_0\right)dt \qquad \left(V^2=\sum_A V_A V_A\right),\\ &\text{b)}\quad \delta I_p = \delta\int_{z_0}^{z_1}\left[\overset{*}{m}\left(\frac{V^2}{2}+U\right)-\overset{*}{m}c^2\right]dt, \end{aligned}$$

avec, d'après (III-17) et (III-20),

$$\text{(III-61)}\qquad \hat{m}=m=\text{Cte},\qquad \overset{*}{m}\simeq m\left(1-\frac{\Phi_0}{c^2}\right).$$

L'intégrale d'action du second membre de (III-60a) est bien celle d'une particule d'épreuve dans un champ gravitationnel et un champ scalaire. Dans (III-60b) l'effet du champ scalaire Φ_0 se manifeste sous la forme de la variation de $\overset{*}{m}$. Cependant, l'effet du champ Φ_0 est inobservable quoique, à courte distance, il ne soit pas négligeable.

En effet, prenons le cas du système solaire. On a alors

$$\text{(III-62)}\qquad U = GM/r.$$

Comparant (III-58) à (III-51a), on constate que

$$\text{(III-63)}\qquad \Phi_0 \simeq U/3.$$

Portant (III-62) et (III-63) dans (III-60a), on obtient l'expression

$$\text{(III-64)}\qquad \delta I_p = m\,\delta\int_{z_0}^{z_1}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{4GM}{3r}\right)dt.$$

Tout se passerait donc dans (III-64) comme si la planète était attirée par un potentiel newtonien $U = \overline{G}M/r$, avec $\overline{G} = 4G/3$. On est alors amené à identifier $\overline{G}$ à la constante newtonienne de la gravitation. Ainsi, l'effet du champ scalaire produit par le Soleil est indécelable, en première approximation, malgré son importance (ou plutôt est confondu avec l'effet gravitationnel).

APPENDICE

1. **Calcul des dérivées du lagrangien L par rapport à $\psi_{\mu\nu}$, $\nabla_\rho\psi_{\mu\nu}$ et $\nabla_\rho\nabla_\sigma\psi_{\mu\nu}$.** —

$$\text{(A-1)}\qquad \begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial\psi_{\mu\nu}}\delta\psi_{\mu\nu}+\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\psi_{\mu\nu})}\delta(\nabla_\rho\psi_{\mu\nu})+\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\nabla_\sigma\psi_{\mu\nu})}\delta(\nabla_\rho\nabla_\sigma\psi_{\mu\nu})\\ &= \frac{\partial L}{\partial\hat{g}^{\alpha\beta}}\delta\hat{g}^{\alpha\beta}+\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\hat{g}^{\alpha\beta})}\delta(\nabla_\rho\hat{g}^{\alpha\beta})+\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\nabla_\sigma\hat{g}^{\alpha\beta})}\delta(\nabla_\rho\nabla_\sigma\hat{g}^{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

On a, d'autre part, $\hat{g}^{\mu\rho}\hat{g}_{\nu\rho}=\delta^\mu_\nu$, $\hat{g}_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}+2\psi_{\mu\nu}$, d'où

$$\text{(A-2)}\quad \text{a)}\qquad \delta\hat{g}^{\alpha\beta} = -2\hat{g}^{\alpha\mu}\hat{g}^{\beta\nu}\delta\psi_{\mu\nu}.$$

En dérivant deux fois (A-2a), on obtient

$$\text{(A-2)}\quad \begin{aligned} &\text{b)}\quad \delta(\nabla_\rho \widehat{g}^{\alpha\beta}) = -2\left[(\widehat{g}^{\alpha\mu}\,\widehat{g}^{\beta\nu})\,\delta(\nabla_\rho\psi_{\mu\nu}) + \nabla_\rho(\widehat{g}^{\alpha\mu}\,\widehat{g}^{\beta\nu})\,\delta\psi_{\mu\nu}\right],\\ &\text{c)}\quad \delta(\nabla_\rho\nabla_\sigma \widehat{g}^{\alpha\beta}) = -2\left[\widehat{g}^{\alpha\mu}\,\widehat{g}^{\beta\nu}\,\delta(\nabla_\rho\nabla_\sigma\psi_{\mu\nu}) + \nabla_\rho(\widehat{g}^{\alpha\mu}\,\widehat{g}^{\beta\nu})\,\delta(\nabla_\sigma\psi_{\mu\nu}) + \right.\\ &\qquad\left. + \nabla_\sigma(\widehat{g}^{\alpha\mu}\,\widehat{g}^{\beta\nu})\,\delta(\nabla_\rho\psi_{\mu\nu}) + \nabla_\rho\nabla_\sigma(\widehat{g}^{\alpha\mu}\,\widehat{g}^{\beta\nu})\,\delta\psi_{\mu\nu}\right]. \end{aligned}$$

Portant (A-2) dans (A-1) et identifiant les termes en $\delta\psi_{\mu\nu}$, $\delta(\nabla_\rho\psi_{\mu\nu})$, $\delta(\nabla_\rho\nabla_\sigma\psi_{\mu\nu})$, on obtient

$$\text{(A-3)}\quad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \frac{\partial L}{\partial\psi_{\mu\nu}} = -2\left[\frac{\partial L}{\partial \widehat{g}^{\alpha\beta}}\,\widehat{g}^{\alpha\mu}\,\widehat{g}^{\beta\nu} + \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \widehat{g}^{\alpha\beta})}\,\nabla_\rho(\widehat{g}^{\alpha\mu}\,\widehat{g}^{\beta\nu}) + \right.\\ &\qquad\left. + \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\nabla_\sigma \widehat{g}^{\alpha\beta})}\,\nabla_\rho\nabla_\sigma(\widehat{g}^{\alpha\mu}\,\widehat{g}^{\beta\nu})\right],\\ &\text{b)}\quad \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\psi_{\mu\nu})} = -2\left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \widehat{g}^{\alpha\beta})}\,\widehat{g}^{\alpha\mu}\,\widehat{g}^{\beta\nu} + 2\,\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\nabla_\sigma \widehat{g}^{\alpha\beta})}\,\nabla_\sigma(\widehat{g}^{\alpha\mu}\,\widehat{g}^{\beta\nu})\right],\\ &\text{c)}\quad \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\nabla_\sigma\psi_{\mu\nu})} = -2\,\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho\nabla_\sigma \widehat{g}^{\alpha\beta})}\,\widehat{g}^{\mu\alpha}\,\widehat{g}^{\nu\beta}. \end{aligned}$$

Nous avons vu au paragraphe II.2 que L peut se mettre sous la forme

$$\text{(A-4)}\qquad L = L_1 + H,$$

avec

$$\text{(A-5)}\quad \begin{aligned} &\text{a)}\quad L_1 = \frac{h}{2\chi}\,\widehat{g}^{\mu\nu}\,(\Delta^\rho_{\mu\nu}\,\Delta^\sigma_{\rho\sigma} - \Delta^\rho_{\mu\sigma}\,\Delta^\sigma_{\nu\rho}),\\ &\text{b)}\quad H = \frac{1}{2\chi}\,\nabla_\alpha\left[\frac{1}{h}\,\nabla_\mu(h^2\,\widehat{g}^{\alpha\mu})\right]. \end{aligned}$$

On en déduit [12]

$$\text{(A-6)}\quad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \frac{\partial L_1}{\partial \widehat{g}^{\alpha\beta}} = \frac{h}{2\chi}\left[\Delta^\rho_{\alpha\sigma}\,\Delta^\sigma_{\beta\rho} - \Delta^\rho_{\alpha\rho}\,\Delta^\sigma_{\beta\sigma} - \right.\\ &\qquad\left. - \frac{1}{2}\,(\widehat{g}^{\rho\sigma}\,\Delta^\lambda_{\rho\sigma} - \widehat{g}^{\rho\lambda}\,\Delta^\sigma_{\rho\sigma})\,(\widehat{g}_{\alpha\gamma}\,\Delta^\gamma_{\beta\lambda} + \widehat{g}_{\beta\gamma}\,\Delta^\gamma_{\alpha\lambda})\right] - \frac{1}{2}\,\widehat{g}_{\alpha\beta}\,L_1,\\ &\text{b)}\quad \frac{\partial L_1}{\partial(\nabla_\rho \widehat{g}^{\alpha\beta})} = \frac{h}{2\chi}\left[\Delta^\rho_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,(\delta^\rho_\alpha\,\Delta^\sigma_{\beta\sigma} + \delta^\rho_\beta\,\Delta^\sigma_{\alpha\sigma}) - \right.\\ &\qquad\left. - \frac{1}{2}\,(\widehat{g}^{\lambda\sigma}\Delta^\rho_{\lambda\sigma} - \widehat{g}^{\lambda\rho}\,\Delta^\sigma_{\lambda\sigma})\,\widehat{g}_{\alpha\beta}\right],\\ &\text{c)}\quad \frac{\partial H}{\partial \widehat{g}^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2\chi}\left[2\,\nabla_\alpha\partial_\beta h - \widehat{g}^{\rho\sigma}\nabla_\rho\nabla_\sigma(h\,\widehat{g}_{\alpha\beta}) - \right.\\ &\qquad\left. - \frac{3}{2}\nabla_\rho(h\,\widehat{g}_{\alpha\beta})\,\nabla_\sigma\widehat{g}^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\,h\,\widehat{g}_{\alpha\beta}\,\nabla_\rho\nabla_\sigma\widehat{g}^{\rho\sigma}\right],\\ &\text{d)}\quad \frac{\partial H}{\partial(\nabla_\rho \widehat{g}^{\alpha\beta})} = \frac{1}{2\chi}\left[\frac{3}{2}\,(\delta^\rho_\alpha\,\partial_\beta h + \delta^\rho_\beta\,\partial_\alpha h) - \right.\\ &\qquad\left. - \frac{3}{2}\,\nabla_\sigma\widehat{g}^{\rho\sigma}\,h\,\widehat{g}_{\alpha\beta} - 2\,\widehat{g}^{\rho\sigma}\,\nabla_\sigma(h\,\widehat{g}_{\alpha\beta})\right],\\ &\text{e)}\quad \frac{\partial H}{\partial(\nabla_\rho\nabla_\sigma \widehat{g}^{\alpha\beta})} = \frac{h}{2\chi}\left[\frac{1}{2}\,(\delta^\rho_\alpha\,\delta^\sigma_\beta + \delta^\sigma_\alpha\,\delta^\rho_\beta) - \widehat{g}^{\rho\sigma}\,\widehat{g}_{\alpha\beta}\right]. \end{aligned}$$

[12] Les résultats obtenus ici sont déduits de ceux de la relativité générale [19*a*,*b*] par la règle de correspondance de Rosen.

2. **Calcul de $l_{1\alpha}{}^{\rho\sigma}$ et $l_{\alpha}{}^{\rho\sigma}$.** — Portant (A-3) dans (II-38), on obtient

$$l_{\alpha}{}^{\rho\sigma} = 2\,\hat{g}^{\rho\nu}\left[\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\sigma \hat{g}^{\alpha\nu})} - \nabla_\lambda \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\sigma \nabla_\lambda \hat{g}^{\alpha\nu})}\right] - \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\sigma \hat{g}^{\mu\nu})}\nabla_\alpha \hat{g}^{\mu\nu} + 2\frac{\partial L}{\partial(\nabla_\sigma \nabla_\lambda g^{\alpha\nu})}\nabla_\lambda \hat{g}^{\rho\nu}$$

ou, d'après (A-4),

$$l_{\alpha}{}^{\rho\sigma} = l_{1\alpha}{}^{\rho\sigma} + A_{\alpha}{}^{\rho\sigma}, \tag{A-7}$$

avec

$$\text{(A-8)}\quad \begin{cases} \text{a)} \quad l_{1\alpha}{}^{\rho\sigma} = 2\,\hat{g}^{\rho\nu}\dfrac{\partial L_1}{\partial(\nabla_\sigma \hat{g}^{\alpha\nu})} = -\dfrac{\partial L_1}{\partial(\nabla_\sigma \psi_{\beta\rho})}\hat{g}_{\alpha\beta}, \\ \text{b)} \quad A_{\alpha}{}^{\rho\sigma} = 2\,\hat{g}^{\rho\nu}\left[\dfrac{\partial H}{\partial(\nabla_\sigma \hat{g}^{\alpha\nu})} - \nabla_\lambda \dfrac{\partial H}{\partial(\nabla_\sigma \nabla_\lambda \hat{g}^{\alpha\nu})}\right] - \dfrac{\partial H}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\sigma \hat{g}^{\mu\nu})}\nabla_\alpha \hat{g}^{\mu\nu} + \\ \qquad\qquad + 2\dfrac{\partial H}{\partial(\nabla_\sigma \nabla_\lambda \hat{g}^{\alpha\nu})}\nabla_\lambda \hat{g}^{\rho\nu}. \end{cases}$$

Portant (A-6) dans (A-8), on obtient

$$\text{(A-9)}\quad \begin{cases} \text{a)} \quad l_{1\alpha}{}^{\rho\sigma} = \dfrac{h}{\chi}\left[\Delta^{\sigma}_{\alpha\beta}\,\hat{g}^{\rho\beta} - \frac{1}{2}(\delta^{\sigma}_{\alpha}\Delta^{\nu}_{\mu\nu} + \delta^{\sigma}_{\mu}\Delta^{\nu}_{\alpha\nu})\,\hat{g}^{\rho\mu} - \right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{1}{2}\hat{g}_{\alpha\beta}\,(\hat{g}^{\mu\nu}\Delta^{\sigma}_{\mu\nu} - \hat{g}^{\sigma\mu}\Delta^{\nu}_{\mu\nu})\,\hat{g}^{\rho\beta}\right], \\ \text{b)} \quad A_{\alpha}{}^{\rho\sigma} = \dfrac{1}{2\chi}\left[\delta^{\sigma}_{\alpha}\,(2\,\hat{g}^{\rho\lambda}\,\partial_\lambda h + h\,\nabla_\lambda \hat{g}^{\rho\lambda}) - \delta^{\rho}_{\alpha}\,(2\,\hat{g}^{\sigma\lambda}\partial_\lambda h + h\,\nabla_\lambda \hat{g}^{\sigma\lambda})\right]. \end{cases}$$

$l_{1\alpha}{}^{\rho\sigma}$ peut encore s'écrire sous la forme

$$l_{1\alpha}{}^{\rho\sigma} = U_{1\alpha}{}^{\rho\sigma} + \nabla_\lambda a_{\alpha}{}^{\rho\sigma\lambda}, \tag{A-10}$$

avec

$$\text{(A-11)}\quad \begin{cases} \text{a)} \quad U_{1\alpha}{}^{\rho\sigma} = \dfrac{\hat{g}_{\alpha\mu}}{2\chi h}\nabla_\nu\left[h^2\,(\hat{g}^{\rho\mu}\hat{g}^{\sigma\nu} - \hat{g}^{\sigma\mu}\hat{g}^{\rho\nu})\right], \\ \text{b)} \quad a_{\alpha}{}^{\rho\sigma\lambda} = \dfrac{1}{2\chi}\,(\delta^{\sigma}_{\alpha}\,h\,\hat{g}^{\rho\lambda} - \delta^{\lambda}_{\alpha}\,h\,\hat{g}^{\rho\sigma}). \end{cases}$$

Portant (A-10) et (A-9b) dans (A-7), on obtient $l_{\alpha}{}^{\rho\sigma} = U_{\alpha}{}^{\rho\sigma} + \nabla_\lambda a_{\alpha}{}^{\rho\sigma\lambda}$, où $a_{\alpha}{}^{\rho\sigma\lambda}$ est donné par (A-11b) et

$$U_{\alpha}{}^{\rho\sigma} = \frac{h}{\chi}\,\hat{g}^{\rho\mu}\,\hat{g}^{\sigma\nu}\,(\nabla_\mu \psi_{\alpha\nu} - \nabla_\nu \psi_{\alpha\mu}).$$

3. **Calcul de $d_{\mu}{}^{\rho}$.** — Portant (A-3) dans le second membre de (II-67) et en tenant compte de (A-4) nous obtenons $d_{\mu}{}^{\rho} = b_{\mu}{}^{\rho} + c_{\mu}{}^{\rho} + \delta_{\mu}{}^{\rho}\,(L_1 + H)$, avec

$$b_{\mu}{}^{\rho} = 2\frac{\partial L_1}{\partial(\nabla_\alpha \hat{g}^{\mu\sigma})}\nabla_\alpha \hat{g}^{\sigma\rho} + 2\,\hat{g}^{\rho\sigma}\frac{\partial L_1}{\partial \hat{g}^{\mu\sigma}} - \frac{\partial L_1}{\partial(\nabla_\rho \hat{g}^{\alpha\beta})}\nabla_\mu \hat{g}^{\alpha\beta},$$

$$c^{\rho}{}_{\mu} = 2\frac{\partial H}{\partial(\nabla_\alpha \hat{g}^{\mu\sigma})}\nabla_\alpha \hat{g}^{\rho\sigma} + 2\frac{\partial H}{\partial(\nabla_\alpha \nabla_\beta \hat{g}^{\mu\sigma})}\nabla_\alpha \nabla_\beta \hat{g}^{\rho\sigma} - 2\frac{\partial H}{\partial(\nabla_\rho \nabla_\sigma \hat{g}^{\alpha\beta})}\nabla_\mu \nabla_\sigma \hat{g}^{\alpha\beta} - $$

$$- \frac{\partial H}{\partial(\nabla_\rho \hat{g}^{\alpha\beta})}\nabla_\mu \hat{g}^{\alpha\beta} + 2\,\hat{g}^{\rho\sigma}\frac{\partial H}{\partial \hat{g}^{\mu\sigma}}.$$

On peut vérifier, d'après (A-6) et tenant compte de (I-35), que $b_{\mu}{}^{\rho} + \delta_{\mu}{}^{\rho}\,L_1 \equiv 0$, $c_{\mu}{}^{\rho} + \delta_{\mu}{}^{\rho}\,H \equiv 0$, d'où $d_{\mu}{}^{\rho} \equiv 0$.

Manuscrit reçu le 20 juin 1966.

Références

[1] F. J. Belinfante, *a*) *Physica*, t. **6**, 1939, p. 887 ; *b*) *Phys. Review*, t. **98**, 1955, p. 793.
[2] D. E. Burlankov, *Ž. eksper. teor. Fiz.*, t. **44**, 1963, p. 1941 (*Soviet Physics JETP*, t. **17**, 1963, p. 1306).
[3] E. Cartan, *a*) *Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. **40**, 1923, p. 325 et t. **41**, 1924, p. 1 ; *b*) Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1946.
[4] J. Chazy, La théorie de la relativité et la mécanique céleste, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1928.
[5] H. Dangvu, *C. r. Ac. Sc.*, t. **251**, 1960, p. 47 ; t. **256**, 1963, p. 82 ; t. **258**, 1964, p. 6348 ; t. **260**, 1965, p. 4307.
[6] R. H. Dicke, *a*) *Phys. Review*, t. **125**, 1962, p. 2163 ; *b*) *Phys. Review*, t. **126**, 1962, p. 1875.
[7] A. Einstein, *a*) *Ann. Physik*, t. **17**, 1905, p. 891 ; *b*) *Ann. Physik*, t. **49**, 1916, p. 769 ; *c*) The meaning of relativity, Princeton Univ. Press, 1955.
[8] L. P. Eisenhart, Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 1949.
[9] R. Feynman, Actes du Congrès sur la gravitation, Chapel Hill, 1957.
[10] M. Fierz, *Helv. phys. Acta*, t. **29**, 1956, p. 128.
[11] S. N. Gupta, *a*) *Rev. mod. Physics*, t. **29**, 1957, p. 334 ; *b*) *apud* Recent developments in general relativity, éd. Polish Scientific Publ. Warszawa, 1962.
[12] J. Haag, Le problème de Schwarzschild, Mémorial Sc. math. n° 46, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1930.
[13] F. Hennequin, Thèse, Paris, 1956.
[14] D. Hilbert, *Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen*, 1915, p. 395.
[15] P. Jordan, Schwerkraft und Weltall, éd. Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1955.
[16] L. Landau & E. Lifshitz, Théorie du champ, éd. Mir, Moscou, 1966.
[17] A. Lichnerowicz, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, éd. Masson, Paris, 1955.
[18] L. Mariot & P. Pigeaud, *C. r. Ac. Sc.*, t. **257**, 1963, p. 621.
[19] C. Møller, *a*) The theory of relativity, Oxford Univ. Press, 1952 ; *b*) *K. Danske Vidensk. Selsk. mat.-fys. Medd.*, t. **31**, 1959, n° 14 ; *c*) *K. Danske Vidensk. Selsk. mat.-fys. Medd.*, t. **34**, 1964, n° 3.
[20] E. Noether, *Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen*, 1918, p. 235.
[21] P. Painlevé, *C. r. Ac. Sc.*, t. **174**, 1922, p. 1137.
[22] A. Papapetrou, *Proc. Roy. Irish Acad.*, [A], t. **52**, 1948, p. 11.
[23] W. Pauli, Enzyklopädie Math. Wiss., V-19, éd. Teubner, Leipzig, 1920.
[24] N. Rosen, *a*) *Phys. Review*, t. **57**, 1940, p. 147 et 150 ; *b*) *Ann. Physics*, t. **22**, 1963, p. 1.
[25] L. Rosenfeld, *Mém. Ac. R. Belg.*, cl. sc., t. **18**, 1940, n° 6.
[26] E. Schücking, *apud* Gravitation : an introduction to current research, par L. Witten, éd. J. Wiley, New York, 1962.
[27] A. Surin, Etude du schéma fluide parfait et des équations de mouvement dans les théories pentadimensionnelles de Jordan-Thiry et de Kaluza-Klein, Mémorial Sc. math. n° 159, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1965.
[28] J. L. Synge, Relativity : the general theory, éd. North-Holland Publ., Amsterdam, 1960.
[29] Y. R. Thiry, *Jl Math. pur. appl.*, t. **30**, 1951, p. 275.
[30] M.-A. Tonnelat, *a*) Les principes de la théorie électromagnétique et de la relativité, éd. Masson, Paris, 1959 ; *b*) Les vérifications expérimentales de la relativité générale, éd. Masson, Paris, 1964.
[31] M.-A. Tonnelat & S. Lederer, *a*) *C. r. Ac. Sc.*, t. **256**, 1963, p. 371 ; *b*) *Nuovo Cim.* [10], t. **34**, 1964, p. 883.
[32] A. Trautman, *a*) *Bull. Ac. Polon. Sc.*, t. **5**, 1957, p. 721 ; *b*) *apud* Gravitation : an introduction to current research, par L. Witten, éd. J. Wiley, New York, 1962 ; *c*) *apud* Lectures on general relativity, Brandeis Summer Inst. in Theor. Phys., t. **1**, 1964.
[33] R. Utiyama, *Phys. Review*, t. **101**, 1956, p. 1597.
[34] J. Winogradski, *Cah. Phys.*, t. **13**, 1959, p. 17.

Imprimé en France. — Imp. JOUVE, 12, Rue de Tournon, Paris (6e)